Annexe L1

Vérification graphique d'une loi

Après l'étude de cette annexe, le lecteur pourra déterminer si des données empiriques sont adéquatement décrites par une loi théorique déjà connue en transformant l'équation de la loi pour obtenir une fonction de la forme $Y = MX + B$ et en vérifiant que le graphique $Y(X)$ tracé à partir des données expérimentales correspond bien à une droite.

Aperçu

Une manière possible de déterminer si les **données empiriques** obtenues lors d'une expérience obéissent à une loi théorique déjà connue (ou partiellement connue) consiste à transformer l'équation de la loi pour obtenir une **fonction affine** de la forme

$$Y = MX + B$$

et à construire un graphique $Y(X)$ à partir des données empiriques. Si on peut tracer sur le graphique une droite qui passe suffisamment près des points expérimentaux, on peut conclure que les données sont conformes à la loi théorique : la pente de la droite correspond à M et l'ordonnée à l'origine correspond à B.

La méthode à utiliser pour transformer l'équation d'une loi théorique en fonction affine dépend de la forme de la loi. Bien sûr, si la loi est déjà de la forme $Y = MX + B$, il n'y a rien à faire. Sinon, il faut procéder en définissant de nouvelles variables. Par exemple, si la loi théorique à vérifier est de la forme

$$y = Cx^n + K$$

et que la valeur de l'exposant n est connue, on peut poser $Y = y$ et $X = x^n$, ce qui donne

$$Y = CX + K$$

Si les données sont conformes à la loi théorique, le graphique $Y(X)$ devrait donner une droite de pente C dont l'ordonnée à l'origine correspond à K.

Cette méthode se généralise à des situations où il y a davantage de variables. Par exemple, si la loi théorique à vérifier est de la forme

$$y = Cx^n z^p + K$$

et que les valeurs des exposants n et p sont connues, on peut poser $Y = y$ et $X = x^n z^p$: le graphique $Y(X)$ devrait alors donner une droite de pente C dont l'ordonnée à l'origine correspond à K.

Exposé

Lorsque l'on recueille au laboratoire des **données empiriques** (c'est-à-dire, obtenues lors d'une expérience), on désire souvent vérifier qu'elles sont conformes à une loi théorique déjà connue. La loi théorique est parfois issue d'une hypothèse : on n'est pas certains que la loi s'applique dans l'expérience, et le but de l'expérience est de déterminer si c'est le cas.

Supposons que l'on a effectué une expérience plusieurs fois, en modifiant la valeur des paramètres pour les différents essais. Pour vérifier que les données sont conformes à la loi théorique, on pourrait, pour chaque essai, remplacer les données dans la loi et vérifier que la concordance est « suffisamment bonne ». Certains essais concorderaient davantage, d'autres moins, et on pourrait essayer de tirer des conclusions à partir de l'ensemble des concordances.

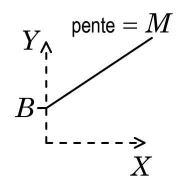
Mais il est préférable de procéder de manière plus globale et systématique en construisant un *graphique* à partir des données et en comparant la forme du graphique avec ce que prévoit la loi théorique. Lorsque le graphique qui représente la loi théorique est une droite, la comparaison est particulièrement facile, car il est relativement aisé de déterminer « à l'œil » si des points expérimentaux sont alignés.

Lorsque le graphique qui représente la loi théorique n'est pas une droite, la comparaison peut être plus difficile. Toutefois, dans bien des cas, on peut effectuer une transformation de variables qui fait en sorte que la loi théorique soit représentée par une droite sur le graphique, ce qui rend aisé la comparaison entre la loi et les données expérimentales. Nous allons donner des exemples de cette approche plus loin dans cette annexe.

Considérons un graphique $Y(X)$, c'est-à-dire un graphique de Y, sur l'axe vertical, en fonction de X, sur l'axe horizontal. (Nous avons choisi X et Y majuscules, car ces variables ne sont rarement utilisées dans les lois physiques que nous allons rencontrer.) Pour qu'une équation soit représentée par une droite sur le graphique, il doit s'agir d'une **fonction affine**, c'est-à-dire dont l'équation est de la forme

$$Y = MX + B$$

Sur le graphique, M correspond à la pente et B à l'ordonnée à l'origine (schéma ci-contre). Dans le cas particulier où $B = 0$, la droite passe par l'origine et on est en présence d'une **fonction linéaire**, $Y = MX$: Y est alors directement proportionnel à X.



Nous allons commencer par analyser une situation où la loi théorique que l'on désire vérifier est déjà sous une forme affine. Dans ce cas, on peut directement placer les données sur un graphique afin de déterminer si les points expérimentaux sont alignés.

Situation 1 : *L'effet de la masse accrochée sur la longueur d'un ressort.* On suspend un ressort au plafond, on y accroche des blocs de différentes masses m, et on mesure sa longueur L (la distance entre le plafond et le crochet auquel la masse est fixée). Les données obtenues sont consignées dans le tableau ci-contre. On désire déterminer si elles sont conformes à la loi théorique

$$L = L_0 + \frac{mg}{k}$$

où L_0 est la longueur naturelle du ressort, k est la constante de rappel du ressort (une mesure de sa rigidité) et g est le module du champ gravitationnel.

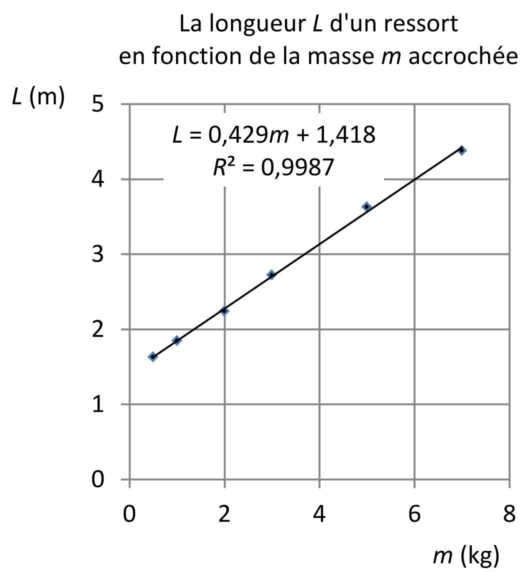
La longueur L d'un ressort en fonction de la masse m accrochée

m (kg)	L (m)
0,50	1,63
1,00	1,85
2,00	2,24
3,00	2,72
5,00	3,63
7,00	4,38

La loi théorique que l'on veut vérifier est déjà de la forme $Y = MX + B$ avec

$$Y = L, \quad X = m, \quad M = \frac{g}{k} \quad \text{et} \quad B = L_0$$

Si les données sont conformes à la loi, le graphique de L en fonction de m devrait donner une droite dont la pente correspond à g/k et l'ordonnée à l'origine correspond à L_0. Pour obtenir le graphique avec le logiciel Excel, on commence par y entrer le tableau de données, puis on le sélectionne. Dans le menu **Insertion**, on demande un graphique de type **Nuage de points avec marqueurs uniquement** : une fois le graphique créé, il est pratique de choisir la **Mise en forme 9** dans le menu **Disposition du graphique** pour faire apparaitre automatiquement des zones de texte pour le titre du graphique et les titres des axes, ainsi que la courbe de tendance et son équation. Après avoir changé les variables x et y dans l'équation affichée pour qu'elles soient conformes aux véritables variables du graphique (L et m), et après quelques petits ajustements cosmétiques, on obtient le graphique ci-dessous.



Pour pouvoir déterminer « à l'œil » si les points expérimentaux sont alignés, ***<u>il est important d'ajuster le cadre du graphique pour que la hauteur de la zone quadrillée soit à peu près égale à sa largeur</u>*** : en effet, lorsque le graphique est trop « écrasé » ou trop « maigre », la concordance entre les données et la courbe de tendance parait souvent meilleure qu'elle ne l'est réellement !

Ici, la concordance « visuelle » entre les points expérimentaux et la courbe de tendance est excellente, ce qui nous permet de conclure que les données sont adéquatement décrites par l'équation théorique. (On peut aussi confirmer la concordance en notant que le coefficient R^2 qui est très près de 1.)

Chaque fois que l'on demande à Excel de tracer une courbe de tendance, il faut prendre le temps de vérifier « visuellement » (ou par la valeur de R^2) que les points expérimentaux sont proches de la courbe de tendance. En effet, Excel n'est pas assez intelligent pour refuser de tracer une courbe de tendance quand les données ne correspondent pas à ce qui est demandé : le logiciel va toujours tracer la « meilleure » courbe de tendance du type demandé, même quand les données ne correspondent clairement pas à une telle courbe. Dans l'éventualité où la courbe de tendance tracée par Excel ne correspond pas aux points expérimentaux, *les valeurs numériques dans l'équation donnée par Excel ne veulent rien dire*, car il y a un problème grave avec l'analyse : les résultats expérimentaux sont peut-être erronés, ou encore l'équation théorique que l'on veut vérifier ne décrit pas adéquatement l'expérience.

Ici, comme il y a concordance, on peut utiliser les valeurs numériques de l'équation donnée par Excel. En les arrondissant à 3 chiffres significatifs, on peut conclure que la longueur du ressort est donnée par

$$L = L_0 + \frac{mg}{k}$$

avec

$$L_0 = 1{,}42 \text{ m} \qquad \text{et} \qquad g/k = 0{,}429 \text{ m/kg}$$

(Vérifiez que les unités de L_0 et g/k font en sorte que l'équation soit cohérente du point de vue des unités.) Comme g = 9,8 N/kg (on suppose que l'expérience a lieu près de la surface de la Terre !), on peut conclure que la constante de rappel du ressort est

$$k = (9{,}8 \text{ N/kg}) / (0{,}429 \text{ m/kg}) = 22{,}8 \text{ N/m}$$

Nous allons maintenant examiner des situations plus complexes pour lesquelles il faut appliquer une transformation de variables à la loi théorique et aux données expérimentales pour obtenir un graphique qui donne une droite.

Situation 2 : *L'effet de la hauteur de chute sur le temps de chute d'une bille.* Afin de déterminer la relation qui existe entre la hauteur de chute d'une bille et la durée de la chute, on lâche une bille à différentes hauteurs H par rapport au sol (vitesse initiale nulle), on filme sa chute et on analyse le film afin de déterminer la durée T de la chute. Les données obtenues sont consignées dans le tableau ci-contre. On désire déterminer si elles sont conformes à la loi théorique obtenue à partir des équations de la cinématique à accélération constante :

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

La durée de chute T d'une bille lâchée à partir du repos pour différentes valeurs de la hauteur de chute H

H (m)	T (s)
0,20	0,20
0,80	0,40
1,20	0,50
3,30	0,80
7,50	1,30

On peut transformer la loi théorique

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\, H^{1/2}$$

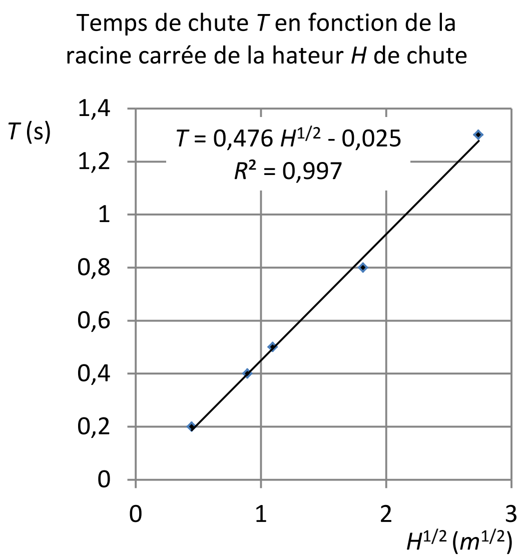
en une fonction affine de la forme $Y = MX + B$ en posant

$$Y = T, \quad X = H^{1/2}, \; M = \sqrt{\frac{2}{g}} \;\; \text{et } B = 0$$

Si les données sont conformes à la loi, le graphique de T en fonction de $H^{1/2}$ devrait donner une droite qui passe près de l'origine (car B = 0) et dont la pente correspond à $\sqrt{2/g}$.

Dans le tableau ci-contre, on a remplacé la colonne H du tableau de données d'origine par une colonne qui indique $H^{1/2}$ (remarquez les unités : comme H est en mètres, $H^{1/2}$ est en mètres exposant 1/2). On peut maintenant utiliser Excel pour tracer le graphique, exactement comme on l'a fait dans la **situation 1** : on obtient le graphique ci-dessous.

$H^{1/2}$ ($m^{1/2}$)	T (s)
0,447	0,20
0,894	0,40
1,095	0,50
1,817	0,80
2,739	1,30



Ici, il y a concordance « visuelle » entre les points expérimentaux et la courbe de tendance (le coefficient R^2 est très près de 1). De plus, la courbe de tendance passe près de l'origine, car la valeur B = 0,025 dans l'équation de la courbe de tendance est très près de 0 (compte tenu de l'échelle de l'axe vertical). On peut donc conclure que le temps de chute est donné par

$$T = \left(0{,}476\ \text{s/m}^{1/2}\right) H^{1/2}$$

Remarquez que les unités de la constante font en sorte que l'équation est cohérente du point de vue des unités.

En théorie, la constante vaut

$$\sqrt{\frac{2}{g}} = \sqrt{\frac{2}{\left(9{,}8\ \text{m/s}^2\right)}} = 0{,}451\ \text{s/m}^{1/2}$$

L'écart en la constante expérimentale et la constante théorique est

$$\frac{0{,}476 - 0{,}451}{0{,}451} \times 100\% = 5{,}5\%$$

Remarque : Lorsque la courbe de tendance passe par l'origine (comme c'est le cas ici), il est possible de demander à Excel de la prolonger jusqu'à l'axe vertical (ce qui permet de montrer de manière explicite que la courbe passe près de l'origine) : il s'agit d'utiliser l'option **Reculer** dans le menu **Format de la courbe de tendance** et d'entrer une valeur *légèrement inférieure* à la valeur selon l'axe horizontal du point expérimental le plus près de l'origine (ici, on peut entrer « 0,446 » car la valeur de $H^{1/2}$ la plus petite est 0,447).

Nous allons maintenant analyser une situation où la loi théorique dépend de deux variables.

Situation 3 : *Une astronaute et son pendule.* Une astronaute accroche une roche au bout d'une corde afin de former un pendule. Elle veut déterminer comment la période T du pendule (le temps requis pour faire un aller-retour) est affectée par la longueur L de la corde et par le module g de l'accélération de chute libre sur la planète où elle se trouve. Premièrement, elle fait 5 essais sur Terre (g = 9,8 m/s²) en faisant varier la longueur de la corde. Puis elle garde la longueur constante (L = 0,8 m) et elle fait des essais à la surface de cinq planètes pour avoir différentes accélérations de chute libre. Ses résultats sont consignés dans le tableau ci-contre. On suppose que la période est donnée par la loi de puissance

L (m)	g (m/s²)	T (s)
0,10	9,8	0,65
0,20	9,8	0,90
0,40	9,8	1,30
0,60	9,8	1,59
0,80	9,8	1,81
0,80	1,5	4,60
0,80	2,5	3,62
0,80	4,9	2,49
0,80	6,0	2,28
0,80	9,8	1,81

$$T = C\sqrt{L/g}$$

et on désire déterminer la valeur de la constante C.

On peut transformer la loi théorique en une fonction affine de la forme $Y = MX + B$ en posant

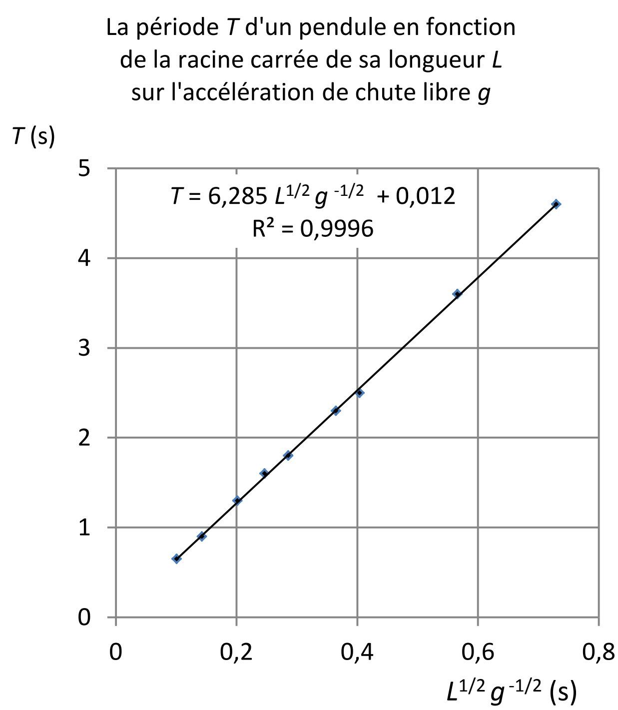
$$Y = T, \quad X = \sqrt{L/g}, M = C \text{ et } B = 0$$

Si les données sont conformes à la loi, le graphique de T en fonction de $\sqrt{L/g}$ devrait donner une droite qui passe près de l'origine (car $B = 0$) et dont la pente correspond à C.

Dans le tableau ci-contre, on a inséré une colonne $\sqrt{L/g}$ dans le tableau des données d'origine. Remarquez les unités de $\sqrt{L/g}$: comme L est en mètres et g est en mètres par seconde carrée, $\sqrt{L/g}$ est en secondes.

L (m)	g (m/s^2)	$\sqrt{L/g}$ (s)	T (s)
0,10	9,8	0,101	0,65
0,20	9,8	0,143	0,90
0,40	9,8	0,202	1,30
0,60	9,8	0,247	1,59
0,80	9,8	0,286	1,81
0,80	1,5	0,730	4,60
0,80	2,5	0,566	3,62
0,80	4,9	0,404	2,49
0,80	6,0	0,365	2,28
0,80	9,8	0,286	1,81

On peut maintenant utiliser Excel pour tracer le graphique de T en fonction de $\sqrt{L/g}$, exactement comme on l'a fait dans la **situation 1** : on obtient le graphique ci-dessous.



Ici, il y a concordance « visuelle » entre les points expérimentaux et la courbe de tendance (le coefficient R^2 est très près de 1). De plus, la courbe de tendance passe près de l'origine, car la valeur B = 0,012 dans l'équation de la courbe de tendance est très près de 0 (compte tenu de l'échelle de l'axe vertical). On peut donc conclure que la période du pendule est donnée par

$$T = 6{,}29\sqrt{L/g}$$

Comme T et $\sqrt{L/g}$ sont tous les deux en secondes, la constante est sans unités.

Au **chapitre 1** du **tome 3**, nous verrons que la période d'un pendule est donnée par l'équation théorique

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

EXERCICES

Dans les exercices qui suivent, vous pouvez exprimez les constantes C et K avec deux chiffres significatifs.

Les réponses aux exercices se trouvent à la page L1-8.

RÉCHAUFFEMENT

L1.1 *Vérifiez la loi.* Vérifiez que les données du tableau ci-contre sont décrites par la loi théorique

$$T = Cv$$

en déterminant la valeur de C à l'aide de la méthode de la présente annexe.

Le temps d'arrêt T d'une voiture pour différentes valeurs de la vitesse initiale v

v (m/s)	T (s)
10	1,4
15	2,1
20	2,9
30	4,3
35	5,0

SÉRIE PRINCIPALE

L1.2 *Vérifiez la loi, prise 2.* Vérifiez que les données du tableau ci-contre sont décrites par la loi théorique

$$f = C\sqrt{T}$$

en déterminant la valeur de C à l'aide de la méthode de la présente annexe.

La fréquence f du son émis par une corde de guitare pour différentes valeurs de la tension T

T (N)	f (Hz)
20	103
40	145
80	207
160	292
320	415

L1.3 *Vérifiez la loi, prise 3.* Vérifiez que les données du tableau ci-contre sont décrites par la loi théorique

$$P = Cv^2 + K$$

en déterminant les valeurs de C et de K à l'aide de la méthode de la présente annexe.

La position d'arrêt P d'une voiture pour différentes valeurs de la vitesse initiale v

v (m/s)	P (m)
12	100
16	108
24	131
32	161
35	178

L1.4 *Une expérience à deux variables.* Dans un dispositif expérimental, on peut faire varier une longueur L (en mètres) et une masse m (en kilogrammes), ce qui influence la durée t du phénomène (en secondes). Dans la première partie de l'expérience, on prend une valeur fixe pour la longueur, $L = 0{,}75$ m, on fait varier la masse m et on prend en note les durées t obtenues :

$L = 0{,}75$ m	
m (kg)	t (s)
2,0	15
2,4	17
2,8	20
3,6	27
4,8	39

Dans la deuxième partie de l'expérience, on prend une valeur fixe pour la masse, $m = 5{,}2$ kg, on fait varier la longueur L et on prend en note les durées t obtenues :

$m = 5{,}2$ kg	
L (m)	t (s)
0,20	77
0,30	64
0,40	57
0,80	43
0,90	41

Vérifiez que les données sont décrites par la loi théorique

$$t = C\frac{m^2}{\sqrt{L}} + K$$

en déterminant les valeurs de C et de K à l'aide de la méthode de la présente annexe.

SÉRIE SUPPLÉMENTAIRE

L1.5 *Vérifiez la loi, prise 4.* Vérifiez que les données du tableau ci-contre sont décrites par la loi théorique

$$f = \frac{C}{L}$$

en déterminant la valeur de C à l'aide de la méthode de la présente annexe.

La fréquence f du son émis par une corde de guitare pour différentes valeurs de la longueur L

L (m)	f (Hz)
0,27	478
0,32	403
0,42	308
0,55	237
0,64	202

L1.6 *La physique du chauffe-eau.* Afin de mieux comprendre le fonctionnement d'un chauffe-eau, Albert prend des contenants isolés de différents diamètres D, les remplit d'eau à une hauteur h, place à l'intérieur un élément chauffant alimenté par une tension U et prend en note le temps t requis pour que la température de l'eau s'élève de 10°C. Ses résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous. (La tension U est mesurée en volts : V.) Vérifiez que les données sont décrites par la loi théorique

$$t = C\frac{hD^2}{U^2}$$

en déterminant la valeur de C à l'aide de la méthode de la présente annexe.

Le temps t requis (en secondes) pour que la température de l'eau s'élève de 10°C pour différentes valeurs du diamètre D du contenant (en centimètres), de la hauteur h de l'eau (en centimètres) et de la tension U appliquée aux bornes de l'élément chauffant (en volts).

<table>
<tr><th>D
(cm)</th><th>h
(cm)</th><th>U
(V)</th><th>t
(s)</th></tr>
<tr><td>5,0</td><td rowspan="3">↑
7,0
↓</td><td rowspan="6">↑
10,0
↓</td><td>144</td></tr>
<tr><td>7,0</td><td>282</td></tr>
<tr><td>10,0</td><td>576</td></tr>
<tr><td rowspan="3">↑
5,0
↓</td><td>5,0</td><td>103</td></tr>
<tr><td>8,0</td><td>164</td></tr>
<tr><td>10,0</td><td>205</td></tr>
<tr><td rowspan="3">↑
6,0
↓</td><td rowspan="3">↑
5,0
↓</td><td>5,0</td><td>591</td></tr>
<tr><td>7,0</td><td>302</td></tr>
<tr><td>10,0</td><td>148</td></tr>
</table>

RÉPONSES

$\boxed{\text{L1.1}}$ *Vérifiez la loi.* $C = 0{,}14\ \mathrm{s^2/m}$

$\boxed{\text{L1.2}}$ *Vérifiez la loi, prise 2.* $C = 23\ \dfrac{\mathrm{Hz}}{\sqrt{\mathrm{N}}}$

$\boxed{\text{L1.3}}$ *Vérifiez la loi, prise 3.* $C = 0{,}071\ \mathrm{s^2/m}$; $K = 90\ \mathrm{m}$

$\boxed{\text{L1.4}}$ *Une expérience à deux variables.* $C = 1{,}1\ \dfrac{\mathrm{s \cdot m^{1/2}}}{\mathrm{kg^2}}$; $K = 9{,}9\ \mathrm{s}$

$\boxed{\text{L1.5}}$ *Vérifiez la loi, prise 4.* $C = 1{,}3 \times 10^2\ \mathrm{Hz \cdot m}$

$\boxed{\text{L1.6}}$ *La physique du chauffe-eau.* $C = 82\ \dfrac{\mathrm{s \cdot V^2}}{\mathrm{cm^3}}$