Simulation de projectile

Table des matières

http://espn.go.com/blog/afceast/post/_/id/35276/tom-brady-not-aaron-rodgers-is-mvp

But

Le laboratoire **simulation de projectile** vise à

1) Réaliser des calculs à l'aide d'un chiffrier électronique comme Excel.
2) Appliquer l'algorithme d'Euler afin de résoudre des problèmes de cinématique numériquement.
3) Analyser la trajectoire d'un objet en une et deux dimensions sous l'effet de la résistance d'un fluide.
4) Utiliser une approche numérique pour estimer des grandeurs physiques comme le temps de chute et l'angle menant à une portée maximale.

Téléchargement de fichier

Afin de réaliser ce laboratoire, vous devrez travailler à l'aide du fichier Excel « **Simulation_projectile.xls** » disponible à l'adresse internet suivante :

http://physique.cmaisonneuve.qc.ca/svezina/projet/simulation_projectile/Simulation_projectile.xls

Ouvrez le fichier Excel et constatez la présence de plusieurs feuilles de calcul et graphique (onglet disponible dans le coin inférieur gauche). Vous devrez réaliser des calculs dans ces différentes feuilles et consulter les graphiques tout au long du laboratoire.

Vous devrez également compléter des tableaux, copier des graphiques et répondre à des questions. Pour ce faire, télécharger le fichier suivant à l'adresse internet suivante :

http://physique.cmaisonneuve.qc.ca/svezina/projet/simulation_projectile/Simulation_projectile_cahier_reponse.doc

La méthode d'Euler au 1er ordre à une dimension

La méthode d'Euler est un algorithme simple et très intuitif permettant d'évaluer numériquement une équation différentielle à l'aide d'une solution approximative du 1er ordre. À partir de deux conditions initiales $f(x)$ et $f'(x)$, cette méthode permettra d'évaluer la fonction à une valeur $x+\Delta x$ sous la forme d'un développement en série de Taylor tel que

$$f(x+\Delta x)= f(x)+ f'(x)\Delta x+O(\Delta x^2) \qquad \text{et} \qquad f'(x+\Delta x)= f'(x)+ f''(x)\Delta x+O(\Delta x^2)$$

où $O(\Delta x^2)$ représente l'imprécision sur la solution exacte.

En cinématique à une dimension, la fonction $f(x)$ correspond à la position $x(t)$ d'un corps, la dérivée première $f'(x)$ correspond à la vitesse $v_x(t)$ d'un corps et la dérivée seconde $f''(x)$ correspond à l'accélération $a_x(t)$. Ces trois fonctions dépendent du temps t associé au mouvement d'un corps.

La 2e loi de Newton

$$\sum F_x = ma_x$$

permet d'évaluer l'accélération

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m}$$

si l'on peut évaluer la somme des forces $\sum F_x$ sur le corps. Puisque les expressions des forces dépendent de la position $x(t)$, de la vitesse $v_x(t)$ et parfois du temps t, il est toujours possible d'évaluer l'accélération a_x à un temps t précis par l'équation

$$a_x = \frac{\sum F_x(x, v_x, t)}{m} \quad .$$

Puisque la fonction de l'accélération a_x est entièrement connue, il suffit d'approximer les fonctions de position $x(t)$ et de vitesse $v_x(t)$ par les développements en série de Taylor précédent.

Voici l'implémentation de la méthode d'Euler du 1er ordre en cinématique à une dimension sous un écoulement de temps $\Delta t = t_f - t_i$:

1. Identifier les données initiales : x_i , v_{xi} , t_i et $\Delta t = t_f - t_i$
2. Évaluer l'accélération initiale : $a_{xi} = a_{xi}(x_i, v_{xi}, t_i) = \dfrac{\sum F_{xi}(x_i, v_{xi}, t_i)}{m}$
3. Évaluer la position finale : $x_f = x_i + v_{xi}\Delta t$
4. Évaluer la vitesse finale : $v_{xf} = v_{xi} + a_{xi}\Delta t$
5. Évaluer le temps final : $t_f = t_i + \Delta t$

La chute libre en une dimension

La chute libre en une dimension est un mouvement vertical influencé uniquement que par la force gravitationnelle. L'expression de cette force prend la forme suivante et nous donne une accélération constante selon l'axe y où $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$:

La force gravitationnelle	L'accélération selon l'axe y
$\vec{F}_g = m\vec{g}$	$a_y = -g$

Preuve :

En appliquant la 2ième loi de Newton selon l'axe y à la chute libre, nous obtenons la relation suivante pour l'accélération :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_g = m\vec{a}$$
$$\Rightarrow \quad m\vec{g} = m\vec{a}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{g} = \vec{a}$$
$$\Rightarrow \quad a_y = -g \qquad \blacksquare$$

1.1 – Lancer une balle vers le haut

Fichier à modifier : Simulation_projectile.xls

Onglet à modifier : Calcul 1.1

Sélectionnez l'onglet ***Calcul 1.1*** de votre fichier Excel. Dans cette feuille Excel, vous devrez évaluer à l'aide de la méthode d'Euler du 1er ordre la position y et la vitesse v_y d'un corps en chute libre en une dimension selon l'axe y associées à la mise en situation suivante :

> ***Lancer une balle vers le haut*** **:** Albert lance une balle à un temps $t_i = 2\ \text{s}$ depuis une position verticale initiale de 1,2 m à une vitesse de 0,8 m/s vers le haut. On désire déterminer la position et la vitesse de la balle à $t_f = 2{,}5\ \text{s}$.

Les conditions initiales de cette mise en situation correspondent aux données du tableau ci-dessous :

Position initiale	Vitesse initiale	Temps initial	Temps final
$y_i = 1{,}2\ \text{m}$	$v_{yi} = 0{,}8\ \text{m/s}$	$t_i = 2\ \text{s}$	$t_f = 2{,}5\ \text{s}$

Dans la section **Paramètres initiaux** de la feuille de calcul, affectez par des valeurs numériques les cases jaunes associées aux données initiales y_i, v_{yi}, t_i et t_f correspondant respectivement aux cellules **C5**, **C6**, **C7** et **C8**.

Dans la section **Constantes** de la feuille de calcul, affectez la valeur « **9,8** » à la cellule **C12** représentant la constante g. Cliquez sur la cellule **C13** associée à la constante Δt et entrez la formule « **= C8 – C7** ». Cette formule réalise le calcul $\Delta t = t_f - t_i$.

Dans la section **Algorithme d'Euler** de la feuille de calcul, affectez les cases jaunes par des formules Excel (en utilisant le symbole « = ») associées aux cinq étapes de l'algorithme d'Euler du 1[er] ordre.

Puisque le contexte de ce problème fait référence à un positionnement vertical selon l'axe y, transposez l'algorithme précédent exprimé en x avec les correspondances suivantes :

$$x_i \leftrightarrow y_i \qquad x_f \leftrightarrow y_f \qquad v_{xi} \leftrightarrow v_{yi} \qquad v_{xf} \leftrightarrow v_{yf} \qquad a_{xi} \rightarrow a_{yi}$$

Voici les formules que vous devrez écrire :

Cellule contenant la formule	Formule dans la cellule Excel	Représentation physique de la formule
C17	**= C5**	$y_i = y_0$
C18	**= C6**	$v_{yi} = v_{y0}$
C19	**= C7**	Initialiser t_i
C21	**= - C12**	$a_{yi} = -g$
C23	**= C17 + C18 * C13**	$y_f = y_i + v_{yi}\Delta t$
C25	**= C18 + C21 * C13**	$v_{yf} = v_{yi} + a_{yi}\Delta t$
C27	**= C19 + C13**	$t_f = t_i + \Delta t$

Dans la section **Solution analytique**, vous allez calculer la position y et la vitesse v_y exacte (solution analytique) de la balle en mouvement à l'aide des équations du MUA

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_{y0}t^2 \qquad \text{et} \qquad v_y = v_{y0} + a_{y0}t \quad .$$

Cependant, puisque le temps initial n'est pas zéro ($t_i = 2$ s), vous devrez évaluer y et v_y à l'aide des équations

$$y_f = y_i + v_{yi}\Delta t + \frac{1}{2}a_{yi}\Delta t^2 \ , \quad v_{yf} = v_{yi} + a_{yi}\Delta t \quad \text{et} \quad t_f = t_i + \Delta t \, .$$

Réalisez vos équations en utilisant la cellule **C31** pour évaluer y et la cellule **C32** pour évaluer v_y. Utilisez les références aux constantes des sections **Paramètres initiaux** et **Constantes** dans vos formules.

Complétez le Tableau 1.1 de votre cahier de réponse et répondez aux deux questions théoriques suivantes dans votre cahier de réponse :

Question 1.1.1 :
Est-ce que la position finale y obtenue numériquement (par Euler) est semblable à celle obtenue analytiquement (par équation du MUA) ? Qualitativement, justifiez pourquoi il en est ainsi.

Question 1.1.2 :
Est-ce que la vitesse finale v_y obtenue numériquement (par Euler) est semblable à celle obtenue analytiquement (par équation du MUA) ? Qualitativement, justifiez pourquoi il en est ainsi.

Augmenter le nombre d'itération de la méthode d'Euler

La méthode d'Euler ne permet pas d'obtenir une très grande précision, car la solution approximative diverge de la solution exacte très rapidement si la valeur de Δt est trop grande.

Pour palier à ce problème, il suffit de fractionner l'écoulement de temps $T = t_F - t_I$ en N petits incréments de temps Δt ayant tous une durée de T / N et de répéter les cinq étapes précédentes N fois. Ainsi, l'algorithme prendra $5N$ opérations, mais augmentera en précision.

Voici l'implémentation de la méthode d'Euler du 1^{er} ordre en cinématique à une dimension sous un écoulement de temps T en N itérations :

1. Identifier les données initiales :

   x_i , v_{xi} , $t_i = t_I$ et $\Delta t = \dfrac{t_F - t_I}{N}$ (1^{re} itération)

   $x_i \leftarrow x_f$, $v_{xi} \leftarrow v_{xf}$, $t_i \leftarrow t_f$ (Initialisation de la prochaine itération)

2. Évaluer l'accélération initiale : $a_{xi} = a_{xi}(x_i, v_{xi}, t_i) = \dfrac{\sum F_{xi}(x_i, v_{xi}, t_i)}{m}$
3. Évaluer la position finale : $x_f = x_i + v_{xi}\Delta t$
4. Évaluer la vitesse finale : $v_f = v_{xi} + a_{xi}\Delta t$
5. Évaluer le temps final : $t_f = t_i + \Delta t$
6. Répétions : Retourner à l'étape 1 jusqu'à ce que le temps $t_f = t_F$.

1.2 – Lancer une balle vers le haut avec plus de précision

Fichier à modifier : Simulation_projectile.xls

Onglet à modifier : 1.2

Sélectionnez l'onglet ***Calcul 1.2*** de votre fichier Excel. Dans cette feuille Excel, vous devrez évaluer à l'aide de la méthode d'Euler du 1^{er} ordre à N itérations la position y et la vitesse v_y d'un corps en chute libre en une dimension selon l'axe y associées à la mise en situation précédente (***Lancer une balle vers le haut***) :

Rappel des conditions initiales de cette mise en situation :

Position initiale	Vitesse initiale	Temps initial	Temps final
$y_i = 1{,}2\ \text{m}$	$v_{yi} = 0{,}8\ \text{m/s}$	$t_I = 2\ \text{s}$	$t_F = 2{,}5\ \text{s}$

Dans la section **Paramètres initiaux** de la feuille de calcul, affectez par des valeurs numériques les cases jaunes associées aux données initiale y_i, v_{yi}, t_I et t_F. Commencez par essayer avec 2 itérations (affecter la valeur « **2** » à la cellule **C9** correspondant au nombre d'itérations N de la méthode d'Euler).

Dans la section **Constantes** de la feuille de calcul, complétez l'affectation de vos cellules en vous assurant de définir la cellule Δt par l'équation

$$\Delta t = \frac{t_F - t_I}{N} \quad .$$

Changez maintenant la valeur de N (cellule **C9**) par la valeur « **4** » et constatez le changement à la cellule Δt (cellule **C14**). Si la valeur n'est pas égale à 0,125 s, modifiez votre équation en **C14**.

Dans la section **Algorithme d'Euler**, vous allez réaliser la méthode d'Euler à N itérations. Constatez que la ligne **19** est déjà complétée et qu'elle correspond aux conditions initiales du mouvement (références aux cellules **C5 C6** et **C7**) .

Débutez par affecter les cellules **C20**, **D20**, et **E20** avec les données **H19**, **I19** et **J19** de la ligne précédente (ce qui correspond à faire l'initialisation de la prochaine itération tel que $x_i \leftarrow x_f$, $v_{xi} \leftarrow v_{xf}$ et $t_i \leftarrow t_f$).

Par la suite, puisque Δt et a_y sont des constantes, vous allez affecter à **F20** (la constante Δt) la formule « **= C14** » et vous allez affecter à **G20** (l'accélération constante a_y) la formule « **= -C13** » (car l'accélération n'est pas g , mais plutôt $a_y = -g$).

Pour compléter la ligne **20**, vous n'avez qu'à compléter l'affectation des cellules **H20**, **I20** et **J20** correspondant à la position y_f , la vitesse v_{yf} et au temps t_f à l'aide des instructions 3, 4 et 5 de la méthode d'Euler du 1er ordre.

Puisque le temps t_f n'est pas égal au temps final t_F , vous devrez répéter la méthode d'Euler N autres fois (puisque nous allons faire varier N entre 1 et 200). Pour accélérer votre travail, vous n'avez pas à calculer cellule par cellule les lignes **21** à **219**. Vous allez utiliser la fonctionnalité de copie de formule d'Excel. Pour ce faire, vous allez sélectionner les cellules **C20** à **J20** de votre ligne **20** et glisser le petit carré noir ■ (voir image ci-dessous) situé dans le coin inférieur droit de la cellule **J20** jusqu'à la ligne **219** afin de reproduire les calculs de l'itération 1 jusqu'à l'itération 200.

16	Algorithme d'Euler									
17										
18		Itération	y_i	v_{yi}	t_i	Δt	a_{yi}	y_f	v_{yf}	t_f
19		0						1,2	0,8	2
20		1	1,2	0,8	2	0,125	-9,8	1,3	-0,425	2,125
21		2								
22		3								
23		4								

- Remarquez que les colonnes **C**, **D**, **E**, **H**, **I** et **J** subissent toutes des changements. Chaque formule de chaque cellule change tout en gardant le même comportement mathématique préalablement établi.
- Remarquez que les colonnes **F** et **G** possèdent toujours les mêmes valeurs puisque les formules qu'elles utilisent possèdent le symbole « $ » signifiant que la référence à la cellule dans les calculs reste toujours la même (« elle ne glisse pas vers le bas avec la fonctionnalité de copie d'Excel »).

Dans la section **Solution analytique**, remarquez la présence de la solution analytique à cette situation. Les cellules **I5** et **I6** font référence aux cellules **C31** et **C32** de l'onglet ***Calcul 1.1***. Complétez la partie supérieure du Tableau 1.2 de votre cahier de réponse en récupérant l'information de la position analytique.

Par la suite, vous devrez remplir le Tableau 1.2 en utilisant votre fichier Excel. Modifiez la valeur de N (située en **C9**) pour calculer la position numérique au temps $t = t_F = 2{,}5\ \text{s}$ avec un nombre limité d'itérations. Pour calculer votre pourcentage d'écart entre la position numérique y_{num} et la position analytique y_{ana}, utilisez l'expression

$$P_{\text{écart}} = \frac{y_{\text{num}} - y_{\text{ana}}}{y_{\text{ana}}} \times 100\,\%$$

où $P_{\text{écart}}$ correspond au pourcentage d'écart.

Maintenant, vous allez déterminer un nombre d'itérations N (de votre choix et approximativement) permettant de calculer à l'aide de la méthode d'Euler du 1er ordre la position y où le pourcentage d'écart avec la valeur analytique est approximativement inférieur à 2%. Modifiez la valeur de N de votre fichier Excel afin d'obtenir l'information vous permettant de compléter la dernière ligne du Tableau 1.2 de votre cahier de réponse.

La chute en une dimension avec résistance d'un fluide

La chute en une dimension avec résistance d'un fluide est un mouvement vertical influencé par la force gravitationnelle et la résistance d'un fluide (eau, air). Les forces prennent les formes ci-dessous ce qui nous donne une accélération selon l'axe *y* non constante :

La force gravitationnelle	La résistance du fluide (*drag*)	L'accélération selon l'axe *y*
$\vec{F}_g = m\vec{g}$	$\vec{F}_d = -bv^n\hat{v}$	$a_y = -g - \frac{b}{m}v^{n-1}v_y$ où $v = \lvert v_y \rvert$

Pour des corps se déplaçant à faible vitesse, $n = 1$ et l'accélération sera égale à

$$a_y = -g - \frac{b}{m}v_y \quad .$$

La solution analytique[1] est alors

$$y = y_0 - v_L t + \left(v_L + v_{y0}\right)\frac{v_L}{g}\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_L}}\right) \qquad \text{où} \qquad v_L = mg/b \text{ correspond à la vitesse limite.}$$

Pour des corps se déplaçant à haute vitesse, $n = 2$ et l'accélération sera égale à

$$a_y = -g - \frac{b}{m}v\,v_y \quad .$$

Cependant, l'équation différentielle à résoudre n'admet pas toujours[2] de solution analytique. Il faut alors se rabattre sur des solutions numériques comme la méthode d'Euler le propose.

[1] Vous pouvez obtenir la démonstration de cette équation au lien suivant : http://webprofs.cmaisonneuve.qc.ca/svezina/nya/note_nya/NYA_XXI_Chap%202.X1.pdf

[2] La forme de la solution analytique dépend des conditions initiales. À deux dimensions, il n'y a pas de solution analytique.

Preuve :

En appliquant la 2ième loi de Newton selon l'axe y à la chute avec résistance de l'air, nous obtenons la relation suivante pour l'accélération :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_g + \vec{F}_{\mathrm{d}} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad m\vec{g} - bv^n \hat{v} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad m\vec{g} - bv^n \frac{\vec{v}}{v} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad -mg - bv^{n-1} v_y = ma_y$$

$$\Rightarrow \quad a_y = -g - \frac{b}{m} v^{n-1} v_y \qquad \blacksquare$$

1.3 – La propulsion d'une bille dans une piscine avec Euler du 1er ordre

Fichier à modifier : Simulation_projectile.xls
Onglet à modifier : Calcul 1.3

Sélectionnez l'onglet ***Calcul 1.3*** de votre fichier Excel. Dans cette feuille Excel, vous devrez évaluer à l'aide de la méthode d'Euler du 1er ordre à N itérations la position et la vitesse d'un corps en chute avec faible résistance d'un fluide en une dimension selon l'axe y associées à la mise en situation suivante :

> ***La propulsion d'une bille dans une piscine*** **:** À l'aide d'un canon, on propulse une petite bille de 1 g vers le haut avec une vitesse de 15 m/s depuis le fond d'une piscine olympique de 15 m de profondeur. La bille est initialement à une distance de 1,2 m du fond de la piscine. On désire évaluer la position et la vitesse de la bille 2 secondes après sa propulsion. Le frottement de l'eau sur la bille est proportionnel à la vitesse de la bille ($n = 1$) avec un coefficient[3] $b = 2\times10^{-4}\ \mathrm{kg/s}$.
>
> ***Remarque :***
>
> - Considérez le fond de la piscine comme étant à la position $y = 0$.
> - Négligez la poussée d'Archimède dans le calcul de vos forces.

Les conditions initiales de cette mise en situation correspondent aux données du tableau ci-dessous où le nombre d'itérations a été fixé à $N = 10$:

Masse du corps	Coefficient de frottement
$m = 0{,}001\ \mathrm{kg}$	$b = 2\times10^{-4}\ \mathrm{kg/s}$

Position initiale	Vitesse initiale	Temps initial	Temps final	Nombre itérations
$y_i = 1{,}2\ \mathrm{m}$	$v_{yi} = 15\ \mathrm{m/s}$	$t_I = 0$	$t_F = 2\ \mathrm{s}$	$N = 10$

[3] Ce coefficient est basé sur l'expression $\vec{F}_r = -b\eta\vec{v}$ où $b = 6\pi r$ avec $r = 1\ \mathrm{cm}$ et $\eta \approx 1\times10^{-3}$.
Référence : http://owl-ge.ch/IMG/pdf/frottement.pdf

Dans la section **<u>Paramètres initiaux</u>** de la feuille de calcul, affectez par des valeurs numériques <u>les cases jaunes</u> associées aux données initiales y_i, v_{yi}, t_I, t_F et N.

Dans la section **<u>Constantes</u>** de la feuille de calcul, complétez l'affectation de vos cellules et utilisez une formule pour évaluer Δt.

Dans la section **<u>Algorithme d'Euler</u>**, réalisez l'affectation de la ligne **22** correspondant à l'itération 1 de la méthode d'Euler du 1er ordre en utilisant l'accélération

$$a_y = -g - \frac{b}{m} v_y \quad .$$

(pour n = 1)

N'oubliez pas d'utiliser les symbole « $ » pour vos constantes (les références à m, b, g et Δt). Vous pouvez utiliser la touche **F4** du clavier pour transformer une cellule variable en cellule constante (ex : **C5** → **C5**). Après avoir complété votre ligne **22**, glissez cette ligne à l'aide du petit carré noir ■ afin de la reproduire jusqu'à la ligne **421** correspondant à l'itération 400 (vous devrez éventuellement analyser des données jusqu'à la 400e itération).

Dans le Tableau 1.3.1 de votre cahier de réponse, écrivez la position numérique y_{num} obtenue au temps final $t_F = 2$ s pour $N = 10$.

Dans la section **<u>Solution analytique</u>**, remarquez la présence dans la cellule **J5** de la formule

$$v_L = mg / b$$

correspondant à la vitesse limite v_L de la chute verticale à faible résistance d'un fluide et la présence dans la cellule **J11** de la formule

$$y = y_0 - v_L t + \left(v_L + v_{y0}\right)\frac{v_L}{g}\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_L}}\right)$$

correspondant à la position de la bille en chute verticale à faible résistance d'un fluide. Inscrivez la position analytique y_{ana} évaluée à $t = 2$ s dans le Tableau 1.3.1 de votre cahier de réponse et calculez le pourcentage d'écart entre y_{num} situé et y_{ana}.

Pour évaluer numériquement le <u>temps de chute</u> de ce mouvement (temps pour atteindre la position $y_f = 0$, donc le fond de la piscine), analyser les données y_f (colonne **H**) obtenues numériquement sur les 20 itérations calculées (et donc sur plus de 2 secondes). Évaluez qualitativement le temps de chute numérique et notez-le dans le Tableau 1.3.2 de votre cahier de réponse.

Répondez aux questions théoriques suivantes dans votre cahier de réponse :

Question 1.3.2.1 :
Est-ce que la méthode d'Euler peut vous permettre d'obtenir le temps de chute <u>exact</u>? Si non, avec la configuration de votre calcul, estimez la précision de votre temps de chute sous la forme (± X seconde) où X doit être déterminé et justifié à l'aide d'un court argument.

Question 1.3.2.2 :
À partir de la solution analytique

$$y = y_0 - v_L t + \left(v_L + v_{y0}\right)\frac{v_L}{g}\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_L}}\right) ,$$

est-il possible d'évaluer <u>algébriquement</u> le temps de chute ? Justifiez votre réponse.

Par la suite, vous allez comparer **(1)** la trajectoire obtenue numériquement avec **(2)** la trajectoire analytique et **(3)** la trajectoire analytique sans résistance. Remarquez que les données des deux trajectoires analytiques ont déjà été produites pour vous dans la section <u>**Solution analytique itérative**</u> et <u>**Chute libre (sans résistance)**</u>.

Dans l'onglet ***Graphique 1.3***, constatez la présence de vos trois trajectoires. Copiez ce graphique dans votre cahier de réponse dans la section Graphique 1.3.3.

Répondez à la question théorique suivante dans votre cahier de réponse :

Question 1.3.3 :
Selon vous, est-ce que la <u>méthode d'Euler du 1er ordre</u> sous-estime ou surestime la résistance de l'eau dans cette mise en situation ? Justifiez votre réponse à l'aide d'un argument basé sur le <u>**Graphique 1.3.3**</u>.

Vous allez maintenant estimer le nombre d'itérations N minimum requis afin que la solution numérique soit « relativement identique » à la solution analytique (N ne devra pas dépasser 400 itérations). Pour prendre votre décision, analyser les courbes disponibles dans l'onglet ***Graphique 1.3***.

Lorsque vous aurez trouvé une valeur N adéquate, copiez le graphique de l'onglet ***Graphique 1.3*** en guise de preuve de votre choix dans votre cahier de réponse dans la section Graphique 1.3.4 et complétez le Tableau 1.3.4.

La méthode d'Euler au 2e ordre à une dimension

Afin d'améliorer légèrement la méthode d'Euler, nous pouvons évaluer numériquement une équation différentielle à l'aide d'une solution approximative du 2e ordre. Ceci revient à approximer la solution exacte à l'aide d'un développement en série de Taylor tel que

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)\Delta x^2 + O\left(\Delta x^3\right)$$

et $$f'(x + \Delta x) = f'(x) + f''(x)\Delta x + O\left(\Delta x^2\right)$$

où $O\left(\Delta x^3\right)$ représente l'imprécision sur la solution exacte $f(x)$. Cette légère amélioration permet d'obtenir avec <u>exactitude la solution à la chute libre</u>, car la solution analytique étant le MUA est justement un polynôme du 2e degré.

Voici l'implémentation de la méthode d'Euler du 2e ordre en cinématique à une dimension sous un écoulement de temps T en N itérations :

1. Identifier les données initiales :

$$x_i \ , \ v_{xi} \ , \ t_i = t_I \ \text{ et } \ \Delta t = \frac{t_F - t_I}{N} \qquad \text{(1re itération)}$$

$$x_i \leftarrow x_f \ , \ v_{xi} \leftarrow v_{xf} \ , \ t_i \leftarrow t_f \qquad \text{(Initialisation de la prochaine itération)}$$

2. Évaluer l'accélération initiale : $a_{xi} = a_{xi}(x_i, v_{xi}, t_i) = \dfrac{\sum F_{xi}(x_i, v_{xi}, t_i)}{m}$
3. Évaluer la position finale : $x_f = x_i + v_{xi}\Delta t + \dfrac{1}{2} a_{xi} \Delta t^2$ (amélioration)
4. Évaluer la vitesse finale : $v_f = v_{xi} + a_{xi}\Delta t$
5. Évaluer le temps final : $t_f = t_i + \Delta t$
6. Répétions : Retourner à l'étape 1 jusqu'à ce que le temps $t_f = t_F$.

1.4 – La propulsion d'une bille dans une piscine avec Euler du 2e ordre

Fichier à modifier : Simulation_projectile.xls

Onglet à modifier : Calcul 1.4

Sélectionnez l'onglet ***Calcul 1.4*** de votre fichier Excel. Dans cette feuille Excel, vous devrez évaluer à l'aide de la méthode d'Euler du 2e ordre à N itérations la position et la vitesse d'un corps en chute avec faible résistance de l'air en une dimension selon l'axe y associées à la mise en situation précédente (***La propulsion d'une bille dans une piscine***).

Dans la section **Paramètres initiaux**, commencez par affecter le nombre d'itération N à 10 ($N = 10$).

Dans la section **Constantes**, écrivez la formule permettant d'évaluer Δt (même formule que la cellule **C16** située dans l'onglet ***Calcul 1.3***).

Dans la section **Algorithme d'Euler**, copiez les formules des cellules **C22** à **J22** qui se retrouvent dans l'onglet ***Calcul 1.3*** exactement au même endroit (**C22** à **J22**) dans l'onglet ***Calcul 1.4***. Par la suite, modifiez la colonne **H** associée à la position y_f afin de calculer cette position avec la méthode d'Euler du 2e ordre tel que

$$y_f = y_i + v_{yi}\Delta t + \frac{1}{2} a_{yi} \Delta t^2 \quad .$$

Vous n'avez qu'à glisser la ligne **22** jusqu'à la ligne **421** pour obtenir des calculs sur 400 itérations.

Dans l'onglet ***Graphique 1.4***, constatez la présence de vos trois trajectoires. Copiez ce graphique dans votre cahier de réponse dans la section Graphique 1.4.1.

Répondez aux deux questions théoriques suivantes dans votre cahier de réponse :

> **Question 1.4.1.1 :**
> Selon vous, est-ce que la méthode d'Euler du 2e ordre sous-estime ou surestime la résistance de l'eau dans cette mise en situation ? Justifiez votre réponse à l'aide d'un argument basé sur le **Graphique 1.4.1**.

> **Question 1.4.1.2 :**
> Selon vous, est-ce que l'usage de la méthode d'Euler du 2e ordre permet de mieux estimer la position numériquement ? Justifiez votre réponse à l'aide d'un argument basé sur le **Graphique 1.4.1**.

Comme vous l'avez réalisé précédemment, vous allez estimer le nombre d'itérations N minimum requis afin que la solution numérique soit « relativement identique » à la solution analytique (N ne devra pas dépasser 400 itérations). Pour prendre votre décision, analyser les courbes disponibles dans l'onglet ***Graphique 1.4***.

Lorsque vous aurez trouvé une valeur N adéquate, copiez le graphique de l'onglet ***Graphique 1.4*** en guise de preuve de votre choix dans votre cahier de réponse dans la section Graphique 1.4.2 et complétez le Tableau 1.4.2.

Afin de mieux comparer l'efficacité de la méthode d'Euler du 1er ordre et du 2e ordre, vous allez compter le nombre d'opérations requises pour obtenir une solution numérique précise avec les deux méthodes du 1er ordre et du 2e ordre.

Nous allons considérer que :

- Une itération de la méthode d'Euler du 1er ordre requiert **8 calculs** (pour 8 cellules).
- Une itération de la méthode d'Euler du 2e ordre requiert **9 calculs** (pour 8 cellules avec un ajout pour le terme supplémentaire $\frac{1}{2}a\Delta t^2$).

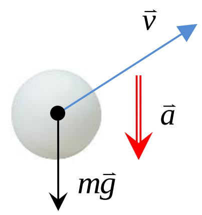
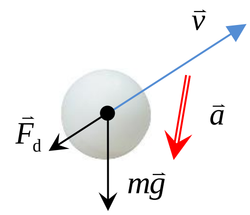
Comptez le nombre d'opérations requises pour réaliser avec une bonne précision le calcul de la position y_{num} de la mise en situation (**La propulsion d'une bille dans une piscine**) pour la méthode d'Euler du 1er ordre et du 2e ordre. Utilisez les valeurs de N du Tableau 1.3.4 et Tableau 1.4.2 en guise de **valeur nécessaire** pour obtenir une bonne précision pour vos deux méthodes. Complétez le Tableau 1.4.3 de votre cahier de réponse.

Répondez à la question théorique suivante dans votre cahier de réponse :

> **Question 1.4.3 :**
> Selon vous, est-ce qu'il y a une différence majeure au niveau de l'effort calculatoire requis dans l'usage de la méthode d'Euler du 1er ordre et du 2e ordre ? Justifiez votre réponse à l'aide d'un argument numérique.

La chute en deux dimensions avec résistance de l'air

La chute en deux dimensions avec résistance de l'air est un mouvement horizontal et vertical influencé par la force gravitationnelle et la résistance de l'air. Le mouvement de chute avec résistance de l'air se distingue du mouvement en chute libre par l'orientation de l'accélération qui dépend du sens et du module de la vitesse.

Chute libre (approximation du projectile)	Chute avec résistance l'air (projectile réel)
$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $\Rightarrow$ $m\vec{g} = m\vec{a}$ 	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $\Rightarrow$ $m\vec{g} + \vec{F}_{\mathrm{d}} = m\vec{a}$ 

Ainsi, nous obtenons les accélérations suivantes selon x et y après l'application de la 2e loi de Newton :

Accélération selon l'axe x	Accélération selon l'axe y	Module de la vitesse
$a_x = -\dfrac{b}{m} v^{n-1} v_x$	$a_y = -g - \dfrac{b}{m} v^{n-1} v_y$	$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}$

<u>Preuve :</u>

En appliquant la 2e loi de Newton selon l'axe x et y à la chute avec résistance de l'air, nous obtenons la relation suivante pour les accélérations :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_g + \vec{F}_{\mathrm{d}} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad m\vec{g} - bv^n \hat{v} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad m\vec{g} - bv^n \frac{\vec{v}}{v} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{g} - \frac{b}{m} v^{n-1} \vec{v} = \vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad \left(-g\,\vec{j}\right) - \frac{b}{m} v^{n-1} \left(v_x \vec{i} + v_y \vec{j}\right) = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_x = -\frac{b}{m} v^{n-1} v_x \qquad \text{et} \qquad a_y = -g - \frac{b}{m} v^{n-1} v_y \qquad \blacksquare$$

2.1 – La balle de *ping-pong*

Fichier à modifier : Simulation_projectile.xls

Onglet à modifier : Calcul 2.1

Sélectionnez l'onglet ***Calcul 2.1*** de votre fichier Excel. Dans cette feuille Excel, vous devrez évaluer à l'aide de la méthode d'Euler du 2e ordre à N itérations la position et la vitesse d'un corps en chute avec forte résistance de l'air en deux dimension ($n = 2$) selon l'axe x et y associées à la mise en situation suivante :

La balle de ping-pong **:** Albert frappe une balle de *ping-pong* de 2,7 g à 15 cm au-dessus d'une table avec une raquette. Ceci propulse la balle à une vitesse de 18 m/s selon un angle de 8° au-dessus de l'horizontale. On désire évaluer la position et la vitesse de la balle selon l'axe x et y après 0,4 seconde de déplacement. Le frottement de l'air sur la balle est proportionnel au carré de la vitesse de la balle ($n = 2$) avec un coefficient[4] $b = 3{,}46 \times 10^{-4}\ \text{kg/m}$. On néglige tout effet de rotation de la balle.

https://www.livestrong.com/article/357943-what-is-the-official-ping-pong-table-size/

Le record de vitesse d'une balle de ping-pong est de 112,5 km/h (31,25 m/s) (Référence : GOOGLE)

Une tableau de *ping-pong* possède 2,74 m de longueur.

Débutez par compléter le tableau des conditions initiales ci-dessous où $N = 200$ itérations :

Masse du corps (balle de *ping-pong*)	Coefficient de frottement

Position initiale en x	Position initiale en y	Module vitesse initiale	Angle initial	Temps initial	Temps final	Nombre itérations

Dans la section **Paramètres initiaux** de la feuille de calcul, affectez par des valeurs numériques les cases jaunes associées aux données initiales. Puisque les mouvements en x et y dépendent des vitesses selon ces axes, décomposez le module de la vitesse initiale v_i à l'aide des fonctions « **= COS(…)** » et « **= SIN(…)** » d'Excel en utilisant la cellule **C13** étant l'angle initial θ_i en radian pour évaluer v_{xi} et v_{yi}.

Dans la section **Constantes** de la feuille de calcul, complétez l'affectation de vos cellules.

Dans la section **Algorithme d'Euler**, réalisez l'affectation de la ligne **28** correspondant à l'itération 1 de la méthode d'Euler du 2e ordre. Vous devrez appliquer l'algorithme selon l'axe x et selon l'axe y séparément à l'aide des accélérations

$$a_x = -\frac{b}{m} v\, v_x \qquad \text{et} \qquad a_y = -g - \frac{b}{m} v\, v_y \quad .$$

(pour n = 2)

[4] Ce coefficient est basé sur l'expression $\vec{F}_r = -\frac{1}{2} C_x \rho S v^2$ où $C_x = 0{,}45$, $\rho = 1{,}225\ \text{kg/m}^3$ et $S = \pi r^2$ avec $r = 20\ \text{mm}$.

Référence : http://owl-ge.ch/IMG/pdf/frottement.pdf

Vous remarquerez la présence d'une nouvelle colonne **I** correspondant au module de la vitesse v_i. Vous pouvez utiliser la fonction « **= RACINE(...)** » d'Excel pour évaluer le module de la vitesse

$$v_i = \sqrt{{v_{xi}}^2 + {v_{yi}}^2}$$

et l'utiliser dans vos calculs d'accélérations.

Par la suite, copiez la ligne **28** jusqu'à la ligne **527** afin de réaliser vos calculs sur 500 itérations.

Remarquez la présence de la section **Chute libre (sans résistance)** qui a déjà été réalisée pour vous.

Dans l'onglet ***Graphique 2.1***, constatez la présence de vos deux trajectoires. Copiez ce graphique dans votre cahier de réponse dans la section Graphique 2.1 et complétez le Tableau 2.1 en utilisant les données calculées par la feuille de calcul en référence.

2.2 – La portée maximale de la balle de *ping-pong*

Fichier à modifier : Simulation_projectile.xls

Onglet à modifier : Calcul 2.2

Sélectionnez l'onglet ***Calcul 2.2*** de votre fichier Excel. Dans cette feuille Excel, vous devrez évaluer à l'aide de la méthode d'Euler du 2^e ordre à N itérations la portée maximale que peut atteindre la balle de *ping-pong* associée à la mise en situation précédente (***La balle de ping-pong*****).**

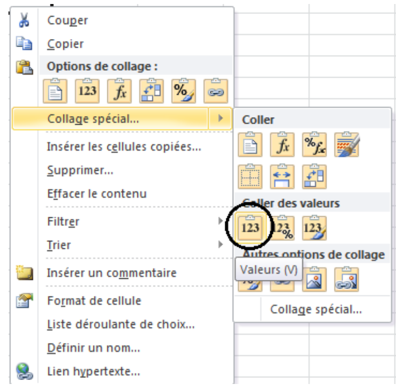
Dans le contexte de cette situation, la ***portée maximale*** va correspondre à la distance horizontalement parcourue par la balle entre le moment où elle est frappée et le moment où elle est située verticalement à la hauteur de la surface de la table étant égale à $y = 0$ m dans le contexte de cette situation. Ainsi, vous n'avez pas à considérer si la balle retombe physiquement sur la table. À la portée maximale, la portée sera bien supérieure à 2,74 m étant la longueur standard de la table.

Dans la section **Paramètres initiaux** de la feuille de calcul, copiez les formules des cellules **C14** et **C15** qui se retrouvent dans l'onglet ***Calcul 2.1*** exactement au même endroit dans l'onglet ***Calcul 2.1*** afin de calculer les vitesses initiales v_{xi} et v_{yi} de la même façon que précédemment.

Dans la section **Algorithme d'Euler**, copiez les formules des cellules **C28** à **P28** qui se retrouvent dans l'onglet ***Calcul 2.1*** exactement au même endroit (**C28** à **P28**) dans l'onglet ***Calcul 2.2***. Par la suite, glissez votre ligne **28** jusqu'à la ligne **2027** afin de remplir la grille de calcul pour 2000 itérations.

Débutez par analyser une trajectoire avec un angle initial entre 10° et 80° qui n'est pas 45°. En modifiant la valeur de θ_i située dans la cellule **C8**, vous pouvez observer la trajectoire dans le graphique de l'onglet ***Calcul 2.2***.

Pour sauvegarder ces données :



1) Sélectionnez les 2000 données *x* et *y* des colonnes **L** et **M**.
2) Faire un clic droit avec la souris et sélectionnée l'option Copier (Copier).
3) Sélectionnez la cellule **R27** de la section **Zone graphique θ entre 10º et 80º** avec un clic gauche de la souris.
4) Faire un clic droit avec la souris et sélectionner l'option Collage spécial … option Valeurs (V) tel qu'illustré sur l'image ci-contre.

Ensuite, adaptez cette procédure afin de sauvegarder dans la section **Zone graphique θ = 45º** les données *x* et *y* associées à une trajectoire avec un angle initial de 45º.

Vous pouvez constater dans l'onglet ***Graphique 2.2*** que ces deux trajectoires s'y retrouvent.

Finalement, modifiez la valeur de θ_i afin de maximiser la portée de la balle. Lorsque vous serez satisfait de votre précision, sauvegardez vos données x et y dans la ***Zone graphique*** $\boldsymbol{\theta_{max}}$.

Copiez le graphique de l'ongle ***Graphique 2.2*** dans votre cahier de réponse dans la section Graphique 2.2 et complétez le Tableau 2.2.

Répondez à la question théorique suivante dans votre cahier de réponse :

Question 2.2 :
Considérant la grande vitesse à laquelle une balle de *ping-pong* peut être frappée, l'angle de portée maximale avec la valeur de la portée maximale que vous avez calculé et la longueur de la table, quel élément échappe au modèle actuel de cinématique de la chute libre avec résistance de l'air pour expliquer que des joueurs de *ping-pong* puissent s'échanger la balle tout en la faisant rebondir sur la table ?

Conclusion

Félicitations ! Vous avez complété ce laboratoire. Remettez votre cahier de réponse dans le format exigé par votre enseignant(e).