Chapitre 6.X1 – Autres applications des matrices dans le *ray tracer*

La matrice de rotation selon l'axe *x*, *y* et *z*

La matrice de rotation R_{zyx} effectuant dans l'ordre[1] une rotation autour de l'axe *x*, l'axe *y* et l'axe *z* correspond au produit des trois matrices R_x, R_y et R_z dans l'ordre tel que

$$R_{zyx} = R_z \cdot R_y \cdot R_x$$

que l'on peut résoudre algébriquement afin d'obtenir le résultat

$$R_{zyx} = \begin{pmatrix} c_y c_z & s_x s_y c_z - c_x s_z & c_x s_y c_z + s_x s_z & 0 \\ c_y s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & c_x s_y s_z - s_x c_z & 0 \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$c_x = \cos(\theta_x),\quad s_x = \sin(\theta_x),\quad c_y = \cos(\theta_y),\quad s_y = \sin(\theta_y),\quad c_z = \cos(\theta_z) \quad \text{et} \quad s_z = \sin(\theta_z) \ .$$

Preuve :

Développons l'expression $R_{zyx} = R_z \cdot R_y \cdot R_x$ en réalisant algébriquement le produit des matrices :

$$R_{zyx} = R_z \cdot R_y \cdot R_x \qquad \text{(Calcul à effectuer)}$$

$$\Rightarrow \quad R_{zyx} = \begin{pmatrix} c_z & -s_z & 0 & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y & 0 & s_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_y & 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & -s_x & 0 \\ 0 & s_x & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Remplacer } R_z,\ R_y \text{ et } R_x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R_{zyx} = \begin{pmatrix} c_z & -s_z & 0 & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y & s_x s_y & c_x s_y & 0 \\ 0 & c_x & -s_x & 0 \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Calcul de } R_{yx} = R_y \cdot R_x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R_{zyx} = \begin{pmatrix} c_y c_z & s_x s_y c_z - c_x s_z & c_x s_y c_z + s_x s_z & 0 \\ c_y s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & c_x s_y s_z - s_x c_z & 0 \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \blacksquare \qquad \text{(Calcul de } R_{zyx} = R_z \cdot R_{yx}\text{)}$$

[1] Ceci est valide en raison de la convention droite gauche des multiplications $\vec{v} = M\,\vec{u}$

La matrice de rotation selon l'axe *z*, *y* et *x*

La matrice de rotation R_{xyz} effectuant dans l'ordre[2] une rotation autour de l'axe z l'axe y et l'axe x correspond au produit des trois matrices R_z, R_y et R_x dans l'ordre tel que

$$R_{xyz} = R_x \cdot R_y \cdot R_z$$

que l'on peut résoudre algébriquement afin d'obtenir le résultat

$$R_{xyz} = \begin{pmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y & 0 \\ c_x s_z + s_x s_y c_z & c_x c_z - s_x s_y s_z & -s_x c_y & 0 \\ s_x s_z - c_x s_y c_z & s_x c_z + c_x s_y s_z & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$c_x = \cos(\theta_x),\ \ s_x = \sin(\theta_x),\ \ c_y = \cos(\theta_y),\ \ s_y = \sin(\theta_y),\ c_z = \cos(\theta_z) \ \text{ et } \ s_z = \sin(\theta_z)\ .$$

<u>Preuve :</u>

Développons l'expression $R_{xyz} = R_x \cdot R_y \cdot R_z$ en réalisant algébriquement le produit des matrices :

$$R_{xyz} = R_x \cdot R_y \cdot R_z \qquad \text{(Calcul à effectuer)}$$

$$\Rightarrow \quad R_{xyz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & -s_x & 0 \\ 0 & s_x & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y & 0 & s_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_y & 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_z & -s_z & 0 & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Remplacer } R_x,\ R_y \text{ et } R_z\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R_{xyz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & -s_x & 0 \\ 0 & s_x & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y & 0 \\ s_z & c_z & 0 & 0 \\ -s_y c_z & s_y s_z & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Calcul de } R_{yz} = R_y \cdot R_z\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad R_{xyz} = \begin{pmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y & 0 \\ c_x s_z + s_x s_y c_z & c_x c_z - s_x s_y s_z & -s_x c_y & 0 \\ s_x s_z - c_x s_y c_z & s_x c_z + c_x s_y s_z & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare \qquad \text{(Calcul de } R_{xya} = R_x \cdot R_{yz}\text{)}$$

---

[2] Ceci est valide en raison de la convention droite gauche des multiplications $\vec{v} = M\,\vec{u}$

Déterminer les coefficients de rotation *Rzyx*

Pour déterminer les coefficients de rotation θ_x, θ_y et θ_z pour ma matrice R_{zyx} que l'on doit utiliser pour faire tourner un vecteur initial $\vec{u}$ dans une nouvelle orientation $\vec{v}$, il faut :

- Définir l'orientation de départ $\vec{u}$ et l'orientation finale $\vec{v}$ en vecteur unitaire.
- Choisir l'ordre de l'application des matrices de rotations comme R_{zyx}.
- Définir deux autres vecteurs en lien avec $\vec{u}$ pour former une base complète dans $\Re^3$.
- Connaître l'expression mathématique des deux autres vecteurs après la rotation.
- Résoudre un système d'équations couplées non linéaires regroupés dans des matrices.

Si l'on désire faire tourner le vecteur $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ en vecteur $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}x & y & z & 1\end{pmatrix}$ à l'aide de la matrice de rotation R_{zyx}, nous aurons besoin des angles suivants :

	θ_x	θ_y	θ_z
Condition	Si $x = \sin(\sigma_x)$, alors $\theta_x = \sigma_x$. Si $x = \sin(\sigma_x + \pi)$, alors $\theta_x = \sigma_x + \pi$.	Si $z = \cos(\theta_x)\cos(\sigma_y)$, alors $\theta_y = \sigma_y$. Si $z = \cos(\theta_x)\cos(\pi - \sigma_y)$, alors $\theta_y = \pi - \sigma_y$.	$\theta_z = \dfrac{\pi}{2}$
Outil de calcul	$\sigma_x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{z^2 + y^2}}\right)$	$\sigma_y = \arcsin\left(\dfrac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}}\right)$	

Cas particulier ($\sqrt{z^2 + y^2} = 0$)	$\vec{v} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\end{pmatrix}$
	$\theta_x = 0$, $\theta_y = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta_z = 0$	$\theta_x = 0$, $\theta_y = -\dfrac{\pi}{2}$, $\theta_z = 0$

Preuve :

Comment trouver les coefficients de rotation θ_x, θ_y et θ_z afin de tourner un système d'axe classique *xyz* en un système d'axe tel que le vecteur unitaire *z* passe de

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{vers} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}x & y & z & 1\end{pmatrix}$$

Avec les deux autres vecteurs

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Que l'on veut transformer en $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ tel que

$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_3 \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

On peut également écrire les contraintes sur $\vec{v}_2$ sous une forme isolé tel que

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1$$

Pour $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_3$, il y a plusieurs solutions admissibles. Si[3] $\vec{v}_3 \neq \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on pourrait prendre

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}_3 \times \vec{u}_1}{\left|\vec{v}_3 \times \vec{u}_1\right|}$$

Ainsi, $\vec{v}_1$ sera dans une direction tel que $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_3$ et $\vec{v}_1 \perp u_1$ qui est une solution particulière, mais il y a de toute façon plein de façon de tourner notre système d'axe pour amener $\vec{u}_3$ à $\vec{v}_3$. Calculons alors $\vec{v}_1$:

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}_3 \times \vec{u}_1}{\left|\vec{v}_3 \times \vec{u}_1\right|} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \frac{\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \times \left(1\vec{i}\right)}{\left|\vec{v}_3 \times \vec{u}_1\right|}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \frac{z\vec{j} - y\vec{k}}{\left|\vec{v}_3 \times \vec{u}_1\right|}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \frac{z\vec{j} - y\vec{k}}{\sqrt{z^2 + y^2}}$$

Calculons maintenant $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1$:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \times \left(\frac{z\vec{j} - y\vec{k}}{\sqrt{z^2 + y^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{z^2 + y^2}} \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \times \left(z\vec{j} - y\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{z^2 + y^2}} \left[\left(-y^2 - z^2\right)\vec{i} - \left(-xy - z(0)\right)\vec{j} + \left(xz - y(0)\right)\vec{k}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{z^2 + y^2}} \left[-\left(y^2 + z^2\right)\vec{i} + xy\,\vec{j} + xz\,\vec{k}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_2 = -\sqrt{y^2 + z^2}\,\vec{i} + \frac{xy}{\sqrt{z^2 + y^2}}\vec{j} + \frac{xz}{\sqrt{z^2 + y^2}}\vec{k}$$

Sous forme vectorielle regroupée en matrice, nous aurons

$$v = R_{zyx} u \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{z^2 + y^2} & x \\ \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xy}{\sqrt{z^2 + y^2}} & y \\ \frac{-y}{\sqrt{z^2 + y^2}} & \frac{xz}{\sqrt{z^2 + y^2}} & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = R_{zyx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

[3] Le non-respect de cette contrainte correspond à notre cas particulier.

Remplaçons l'expression de la matrice R_{zyx} et effectuons le calcul $R_{zyx}u$:

$$v = R_{zyx}u$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{z^2+y^2} & x \\ \frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}} & \frac{xy}{\sqrt{z^2+y^2}} & y \\ \frac{-y}{\sqrt{z^2+y^2}} & \frac{xz}{\sqrt{z^2+y^2}} & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_y c_z & s_x s_y c_z - c_x s_z & c_x s_y c_z + s_x s_z & 0 \\ c_y s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & c_x s_y s_z - s_x c_z & 0 \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{z^2+y^2} & x \\ \frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}} & \frac{xy}{\sqrt{z^2+y^2}} & y \\ \frac{-y}{\sqrt{z^2+y^2}} & \frac{xz}{\sqrt{z^2+y^2}} & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_y c_z & s_x s_y c_z - c_x s_z & c_x s_y c_z + s_x s_z \\ c_y s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & c_x s_y s_z - s_x c_z \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système d'équations, nous devrons comparer un élément de la matrice de gauche avec un élément de la matrice de droit pour en tirer des conclusions.

Débutons notre analyse en supposant que $\sqrt{z^2+y^2} \neq 0$: (exclusion des cas $\vec{v} = (\pm 1 \quad 0 \quad 0)$)

- En ligne 3, colonne 1 (M_{20}) :

$$-\frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}} = -s_y$$

Nous pouvons effectuer l'arcsinus et obtenir l'angle θ_y :

$$-\frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}} = -s_y \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta_y) = \frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta_y = \{\sigma_y \ , \ \pi - \sigma_y\}} \quad \text{où} \quad \boxed{\sigma_y = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}}\right)}$$

- En ligne 3, colonne 2 (M_{21}) et en ligne 3, colonne 3 (M_{22}) :

$$\frac{xz}{\sqrt{z^2+y^2}} = s_x c_y \qquad \text{et} \qquad z = c_x c_y$$

En effectuant la division de ces deux expressions, nous obtenons l'angle θ_x :

$$\frac{\dfrac{xz}{\sqrt{z^2+y^2}}}{z} = \frac{s_x c_y}{c_x c_y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(\theta_x)\cos(\theta_y)}{\cos(\theta_x)\cos(\theta_y)} = \frac{xz/\sqrt{z^2+y^2}}{z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(\theta_x)}{\cos(\theta_x)} = \frac{x}{\sqrt{z^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta_x = \{\sigma_x \;,\; \pi + \sigma_x\}} \quad \text{où} \quad \boxed{\sigma_x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{z^2+y^2}}\right)}$$

- En ligne 1, colonne 1 (M_{00}) :

$$0 = c_y c_z$$

Puisque c_y peut prendre n'importe quelle valeur puisque $\theta_y = \{\sigma_y \;,\; \pi - \sigma_y\}$, cette égalité sera vérifiée uniquement si $\theta_z = \pm\dfrac{\pi}{2}$, car $c_z = \cos(\theta_z) = \cos\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$).

Ainsi :

$$\boxed{\theta_z = \left\{\frac{\pi}{2} \;,\; -\frac{\pi}{2}\right\}}$$

Maintenant que nous avons deux choix d'angle pour nos paramètres θ_x, θ_y et θ_z, nous devons trouver une façon de les déterminer. Débutons par exploiter le fait que $\theta_z = \pm\dfrac{\pi}{2}$ ce qui donnera des valeurs à $c_z = 0$ et $s_z = \pm 1$. Remplaçons les expressions de c_y et s_z dans notre système d'équations représenté matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{z^2+y^2} & x \\ \dfrac{z}{\sqrt{z^2+y^2}} & \dfrac{xy}{\sqrt{z^2+y^2}} & y \\ \dfrac{-y}{\sqrt{z^2+y^2}} & \dfrac{xz}{\sqrt{z^2+y^2}} & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_y c_z & s_x s_y c_z - c_x s_z & c_x s_y c_z + s_x s_z \\ c_y s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & c_x s_y s_z - s_x c_z \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{z^2+y^2} & x \\ \dfrac{z}{\sqrt{z^2+y^2}} & \dfrac{xy}{\sqrt{z^2+y^2}} & y \\ \dfrac{-y}{\sqrt{z^2+y^2}} & \dfrac{xz}{\sqrt{z^2+y^2}} & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_y(0) & s_x s_y(0) - c_x(\pm 1) & c_x s_y(0) + s_x(\pm 1) \\ c_y(\pm 1) & s_x s_y(\pm 1) + c_x(0) & c_x s_y(\pm 1) - s_x(0) \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{z^2+y^2} & x \\ \dfrac{z}{\sqrt{z^2+y^2}} & \dfrac{xy}{\sqrt{z^2+y^2}} & y \\ \dfrac{-y}{\sqrt{z^2+y^2}} & \dfrac{xz}{\sqrt{z^2+y^2}} & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mp c_x & \pm s_x \\ \pm c_y & \pm s_x s_y & \pm c_x s_y \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} & -\sqrt{z^2+y^2} & x \\ \dfrac{z}{\sqrt{z^2+y^2}} & \dfrac{xy}{\sqrt{z^2+y^2}} & y \\ & & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \mp c_x & \pm s_x \\ \pm c_y & \pm s_x s_y & \pm c_x s_y \\ & & c_x c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- En ligne 1, colonne 3 (M_{02}) :

$$x = \pm s_x$$

Imposons le choix $\theta_z = \pm\dfrac{\pi}{2}$ ce qui donnera l'équation

$$x = +s_x$$

Ainsi : (avec $\theta_z = \pm\dfrac{\pi}{2}$)

- Si $x = \sin(\sigma_x)$, alors $\theta_x = \sigma_x$.
- Si $x = \sin(\sigma_x + \pi)$, alors $\theta_x = \sigma_x + \pi$.

- En ligne 3, colonne 3 (M_{22}) :

$$z = c_x c_y$$

Puisque θ_z a été impose pour déterminer θ_x, utilisons θ_x pour determiner θ_y.

Ainsi :

- Si $z = \cos(\theta_x)\cos(\sigma_y)$, alors $\theta_y = \sigma_y$.
- Si $z = \cos(\theta_x)\cos(\pi - \sigma_y)$, alors $\theta_y = \pi - \sigma_y$.

Dans les deux cas particuliers où $\vec{v} = (1 \quad 0 \quad 0)$ et $\vec{v} = (-1 \quad 0 \quad 0)$, le calcul de $\sqrt{z^2+y^2} = 0$ ce qui provoquera des divisions par zéro dans nos calculs. La détermination des dans pour ces deux cas étant trivial sont laissé à la discrétion du lecteur. ■

La matrice de rotation selon un axe *u*

Soit un axe de rotation *u* normalisé tel que

$$\hat{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad \text{où} \quad \sqrt{u_x^{\ 2} + u_y^{\ 2} + u_z^{\ 2}} = 1$$

dans un système d'axe *xyz*. La matrice de transformation permettant d'effectuer une rotation d'un angle θ_u autour de l'axe $\hat{u}$ passant par l'origine est

$$R_u = \hat{u}\hat{u}^T + \left(I - \hat{u}\hat{u}^T\right)\cos(\theta_u) + \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y & 0 \\ u_z & 0 & -u_x & 0 \\ -u_y & u_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sin(\theta_u) \quad .$$

Cette matrice peut être simplifiée sous la forme

$$R_u = \begin{pmatrix} u_x^{\ 2} + \left(1 - u_x^{\ 2}\right)c_u & u_x u_y (1 - c_u) - u_z s_u & u_x u_z (1 - c_u) + u_y s_u & 0 \\ u_x u_y (1 - c_u) + u_z s_u & u_y^{\ 2} + \left(1 - u_y^{\ 2}\right)c_u & u_y u_z (1 - c_u) - u_x s_u & 0 \\ u_x u_z (1 - c_u) - u_y s_u & u_y u_z (1 - c_u) + u_x s_u & u_z^{\ 2} + \left(1 - u_z^{\ 2}\right)c_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tel que

$$c_u = \cos(\theta_u) \quad \text{et} \quad s_u = \sin(\theta_u) \quad .$$

Dans la littérature, cette matrice porte le nom de la matrice des cosinus directionnels (*direction cosine matrix*).

Preuve :

En construction …

La matrice d'homothétie, rotation *xyz* et translation

La matrice de transformation $M_{TrRzyxSc}$ effectuant dans l'ordre[4] une homothétie, une rotation autour de l'axe *x*, l'axe *y* et l'axe *z* et une translation correspond au produit des cinq matrices Sc, R_x, R_y, R_z et Tr dans l'ordre tel que

$$M_{TrRzyxSc} = Tr \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot Sc$$

(l'ordre objet vers monde)

que l'on peut résoudre algébriquement afin d'obtenir le résultat

$$M_{TrRzyxSc} = \begin{pmatrix} sc_x(c_y c_z) & sc_y(s_x s_y c_z - c_x s_z) & sc_z(c_x s_y c_z + s_x s_z) & tr_x \\ sc_x(c_y s_z) & sc_y(s_x s_y s_z + c_x c_z) & sc_z(c_x s_y s_z - s_x c_z) & tr_y \\ -sc_x(s_y) & sc_y(s_x c_y) & sc_z(c_x c_y) & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$c_x = \cos(\theta_x),\ \ s_x = \sin(\theta_x),\ \ c_y = \cos(\theta_y),\ \ s_y = \sin(\theta_y),\ c_z = \cos(\theta_z)\ \text{ et }\ s_z = \sin(\theta_z)\ .$$

<u>Preuve :</u>

Développons l'expression $M_{TrRzyxSc} = Tr \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot Sc$ en réalisant algébriquement le produit des matrices :

$$M_{TrRzyxSc} = Tr \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot Sc$$

$$\Rightarrow \quad M_{TrRzyxSc} = Tr \cdot R_{zyx} \cdot Sc$$

$$\Rightarrow \quad M_{TrRzyxSc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y c_z & s_x s_y c_z - c_x s_z & c_x s_y c_z + s_x s_z & 0 \\ c_y s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & c_x s_y s_z - s_x c_z & 0 \\ -s_y & s_x c_y & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_{TrRzyxSc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sc_x(c_y c_z) & sc_y(s_x s_y c_z - c_x s_z) & sc_z(c_x s_y c_z + s_x s_z) & 0 \\ sc_x(c_y s_z) & sc_y(s_x s_y s_z + c_x c_z) & sc_z(c_x s_y s_z - s_x c_z) & 0 \\ -sc_x(s_y) & sc_y(s_x c_y) & sc_z(c_x c_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_{TrRzyxSc} = \begin{pmatrix} sc_x(c_y c_z) & sc_y(s_x s_y c_z - c_x s_z) & sc_z(c_x s_y c_z + s_x s_z) & tr_x \\ sc_x(c_y s_z) & sc_y(s_x s_y s_z + c_x c_z) & sc_z(c_x s_y s_z - s_x c_z) & tr_y \\ -sc_x(s_y) & sc_y(s_x c_y) & sc_z(c_x c_y) & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \blacksquare$$

[4] Ceci est valide en raison de la convention droite gauche des multiplications $\vec{v} = M\,\vec{u}$

La matrice de translation, rotation *zyx* et d'homothétie

La matrice de transformation $M_{ScRxyzTr}$ effectuant dans l'ordre[5] une translation, une rotation autour de l'axe z, l'axe y et l'axe x et une homothétie correspond au produit des cinq matrices Tr, R_z, R_y, R_x et Sc dans l'ordre tel que

$$M_{ScRxyzTr} = Sc \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot Tr$$

(l'ordre monde vers objet)

que l'on peut résoudre algébriquement afin d'obtenir le résultat

$$M_{ScRxyzTr} = \begin{pmatrix} sc_x(c_y c_z) & -sc_x(c_y s_z) & sc_x(s_y) & sc_x(c_y c_z tr_x - c_y s_z tr_y + s_y tr_z) \\ sc_y R_{10} & sc_y R_{11} & -sc_y(s_x c_y) & sc_y(R_{10}\, tr_x + R_{11}\, tr_y - s_x c_y tr_z) \\ sc_z R_{20} & sc_z R_{21} & sc_z c_x c_y & sc_z(R_{20} tr_x + R_{21}\, tr_y + c_x c_y tr_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$R_{10} = c_x s_z + s_x s_y c_z \ , \ R_{11} = c_x c_z - s_x s_y s_z \ , \ R_{20} = s_x s_z - c_x s_y c_z \ \text{ et } \ R_{21} = s_x c_z + c_x s_y s_z \ .$$

avec

$$c_x = \cos(\theta_x), \ \ s_x = \sin(\theta_x), \ \ c_y = \cos(\theta_y), \ \ s_y = \sin(\theta_y), \ \ c_z = \cos(\theta_z) \ \text{ et } \ s_z = \sin(\theta_z) \ .$$

Preuve :

Développons l'expression $M_{ScRxyzTr} = Sc \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot Tr$ en réalisant algébriquement le produit des matrices :

$$M_{ScRxyzTr} = Sc \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot Tr$$

$$\Rightarrow \quad M_{ScRxyzTr} = Sc \cdot R_{xyz} \cdot Tr$$

$$\Rightarrow \quad M_{ScRxyzTr} = \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y & 0 \\ c_x s_z + s_x s_y c_z & c_x c_z - s_x s_y s_z & -s_x c_y & 0 \\ s_x s_z - c_x s_y c_z & s_x c_z + c_x s_y s_z & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Afin d'alléger la notation, introduisons les définitions

$$R_{10} = c_x s_z + s_x s_y c_z \ , \ R_{11} = c_x c_z - s_x s_y s_z \ , \ R_{20} = s_x s_z - c_x s_y c_z \ \text{ et } \ R_{21} = s_x c_z + c_x s_y s_z \ .$$

[5] Ceci est valide en raison de la convention droite gauche des multiplications $\vec{v} = M\,\vec{u}$

Après avoir simplifié la notation de notre expression, complétons le calcul matriciel :

$$M_{ScRxyzTr} = \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y & 0 \\ R_{10} & R_{11} & -s_x c_y & 0 \\ R_{20} & R_{21} & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_{ScRxyzTr} = \begin{pmatrix} sc_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y & c_y c_z tr_x - c_y s_z tr_y + s_y tr_z \\ R_{10} & R_{11} & -s_x c_y & R_{10} tr_x + R_{11} tr_y - s_x c_y tr_z \\ R_{20} & R_{21} & c_x c_y & R_{20} tr_x + R_{21} tr_y + c_x c_y tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_{ScRxyzTr} = \begin{pmatrix} sc_x(c_y c_z) & -sc_x(c_y s_z) & sc_x(s_y) & sc_x(c_y c_z tr_x - c_y s_z tr_y + s_y tr_z) \\ sc_y R_{10} & sc_y R_{11} & -sc_y(s_x c_y) & sc_y(R_{10} tr_x + R_{11} tr_y - s_x c_y tr_z) \\ sc_z R_{20} & sc_z R_{21} & sc_z c_x c_y & sc_z(R_{20} tr_x + R_{21} tr_y + c_x c_y tr_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

La matrice de transformation objet-monde et monde-objet

La **matrice de transformation** $M_{\mathrm{o}\to\mathrm{m}}$ de **l'espace objet vers l'espace monde** a été définie tel que

$$M_{\mathrm{o}\to\mathrm{m}} = Tr \cdot R_z \cdot R_y \cdot R_x \cdot Sc$$

ce qui correspond à l'expression

$$M_{\mathrm{o}\to\mathrm{m}} = M_{TrRzyxSc}$$

avec les paramètres

$$Sc = Sc(sc_x, sc_y, sc_z),\ R_x = R_x(\theta_x),\ R_y = R_y(\theta_y),$$
$$R_z = R_z(\theta_z) \ \text{ et } \ Tr = Tr(tr_x, tr_y, tr_z) \ .$$

Pour ce qui est de la **matrice de transformation** $M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}}$ de **l'espace monde vers l'espace objet**, il faut s'assurer que l'identité

$$I = M_{\mathrm{o}\to\mathrm{m}} \cdot M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}} = M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}} \cdot M_{\mathrm{o}\to\mathrm{m}}$$

où I est la matrice identité est belle et bien respectée.

Puisque les formes des matrices d'homothéties, de rotation et de translation sont semblables à leur inverse, nous pouvons modifier les différents paramètres de ces matrices afin de respecter notre identité et utiliser la forme de la matrice $M_{ScRxyzTr}$ pour construire la matrice de transformation $M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}}$. Ceci nous permet d'affirmer que

$$M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}} = M_{ScRxyzTr}$$

avec les paramètres

$$Sc = Sc(1/sc_x, 1/sc_y, 1/sc_z),\ R_x = R_x(-\theta_x),\ R_y = R_y(-\theta_y),\ R_z = R_z(-\theta_z) \ \text{ et } \ Tr = Tr(-tr_x, -tr_y, -tr_z) \ .$$

Preuve :

La preuve proposée nécessite d'effectuer le calcul

$$I = M_{\mathrm{o}\to\mathrm{m}} \cdot M_{\mathrm{m}\to\mathrm{o}} = M_{TrRzyxSc} \cdot M_{ScRxyzTr}$$

avec des paramètres

$$Sc = Sc(sc_x, sc_y, sc_z),\ R_x = R_x(\theta_x),\ R_y = R_y(\theta_y),\ R_z = R_z(\theta_z) \text{ et } Tr = Tr(tr_x, tr_y, tr_z)$$

pour la matrice $M_{TrRzyxSc}$ et avec des paramètres

$$Sc = Sc(1/sc_x, 1/sc_y, 1/sc_z),\ R_x = R_x(-\theta_x),\ R_y = R_y(-\theta_y),\ R_z = R_z(-\theta_z) \text{ et } Tr = Tr(-tr_x, -tr_y, -tr_z)$$

pour la matrice $M_{ScRxyzTr}$.

Cependant, ce long calcul est laissé à la discrétion du lecteur.