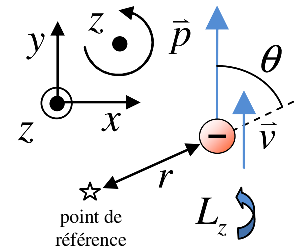
Chapitre 5.5b – Le spectre de l'hydrogène et le modèle de Bohr

Le moment cinétique

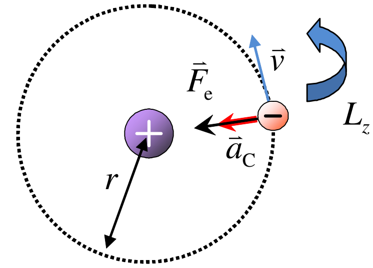


Le moment cinétique L_z d'une particule mesure la quantité de mouvement transportée par une particule pour effectuer une rotation autour de l'axe z. Cette quantité augmente si la particule augmente sa quantité de mouvement p, augmente si la trajectoire circulaire de rayon r augmente et augmente lorsque l'angle θ s'approche de 90° favorisant ainsi une trajectoire de forme circulaire.

Moment cinétique L_z d'une particule	Moment cinétique L_z d'un corps	Moment cinétique vectoriel
$L_z = r\,p\sin(\theta)$	$L_z = I\,\omega$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

où
L_z : Moment cinétique de la particule selon l'axe z ($\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$)
r : Distance dans le plan xy entre le point de référence et la particule (m)
p : Module de la quantité de mouvement ($p = mv$) de la particule dans le plan xy ($\text{kg}\cdot\text{m/s}$)
θ : Angle dans le plan xy entre r et p
I : Moment d'inertie du corps ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
ω : Vitesse angulaire du corps (rad/s)

Le moment cinétique d'un électron en orbite autour d'un proton



Le moment cinétique est une mesure très intéressant lorsqu'il est question d'orbite. Sous l'action d'une force centrale, une particule effectuant une trajectoire circulaire de rayon r autour d'un point de référence doit avoir une valeur imposée de moment cinétique L_z. Le moment cinétique augmentera avec l'augmentation du rayon de l'orbite malgré le fait que la vitesse de la particule diminuera.

Dans le cas d'un électron tournant autour d'un proton sous l'action de la force électrique, on peut établir les relations suivantes entre le rayon de l'orbite et le moment cinétique requis pour être sur l'orbite :

$$L_z = \sqrt{m_e k e^2 r} \quad \text{équivalent à} \quad r = L_z^{\,2} / m_e k e^2$$

où
L_z : Moment cinétique de l'électron autour du proton selon l'axe z ($\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$)
r : Le rayon de l'orbite de l'électron (m)
e : Charge électrique élémentaire, $e = 1{,}6\times10^{-19}\,\text{C}$
k : Constante de la loi de Coulomb, $k = 9{,}00\times10^{9}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$
m_e : Masse de l'électron, $m_e = 9{,}11\times10^{-31}\,\text{kg}$

Preuve :

Considérons un électron en mouvement sur une trajectoire circulaire autour d'un proton immobile. Évaluons par la 2ième loi de Newton et de l'accélération centripète a_C la relation existant entre la force électrique F_e et le rayon de la trajectoire circulaire. Cette relation imposera une vitesse v particulière en fonction du rayon r de l'orbite :

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$	$\Rightarrow$	$F_e = ma_C$	(Force électrique radiale avec acc. centripète)
	$\Rightarrow$	$k\dfrac{\lvert q_p q_{e^-}\rvert}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$	(Remplacer $F_e = k\dfrac{\lvert qQ\rvert}{r^2}, a_C = \dfrac{v^2}{r}$)
	$\Rightarrow$	$k\dfrac{\lvert(e)(-e)\rvert}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$	(Proton : $q_p = e$, Électron : $q_{e^-} = -e$)
	$\Rightarrow$	$\boxed{v = \sqrt{\dfrac{ke^2}{mr}}}$	(Simplifier *r*, isoler *v*)

Introduisons cette relation vitesse-rayon dans l'évaluation du moment cinétique de l'électron :

$L_z = r\,p\sin(\theta)$	$\Rightarrow$	$L_z = r(mv)\sin(90°)$		(Trajectoire circulaire : $\theta = 90°$, $p = mv$)
	$\Rightarrow$	$L_z = r\,m\left(\sqrt{\dfrac{ke^2}{mr}}\right)$		(Remplacer $v = \sqrt{\dfrac{ke^2}{mr}}$, preuve précédente)
	$\Rightarrow$	$L_z = \sqrt{mke^2r}$	■ (1)	(Simplifier *m* et *r*)
	$\Rightarrow$	$r = \dfrac{{L_z}^2}{m_e ke^2}$	■ (2)	(Isoler *r*)

L'énergie cinétique d'une particule en termes de moment cinétique

Le mouvement d'une particule peut toujours être décomposé comme étant radiale et rotatif par rapport à un point de référence. En décomposant la vitesse de cette manière, nous pouvons obtenir l'expression suivante de l'énergie cinétique en fonction du moment cinétique :

$$K = \frac{{p_r}^2}{2m} + \frac{{L_z}^2}{2I_z} \qquad \text{où} \qquad I_z = mr^2$$

où L_z : Moment cinétique de la particule selon l'axe z ($\mathrm{kg \cdot m^2/s}$)

p_r : Quantité de mouvement radial de la particule ($\mathrm{kg \cdot m/s}$)

m : Masse de la particule (kg)

I_z : Moment d'inertie de la particule ($\mathrm{kg \cdot m^2}$)

r : Distance entre la particule et le point de référence (m)

Preuve :

Exprimons l'énergie cinétique à l'aide d'une vitesse décomposée radialement à un point de référence en tangentiellement à un point de référence :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{1}{2}m\left(v_r^{\,2} + v_\theta^{\,2}\right)$$

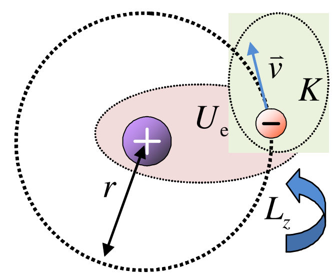
$$\Rightarrow \qquad K = \frac{m}{m}\frac{1}{2}mv_r^{\,2} + \frac{m}{m}\frac{r^2}{r^2}\frac{1}{2}mv_\theta^{\,2}$$

$$\Rightarrow \qquad K = \frac{m^2 v_r^{\,2}}{2m} + \frac{m^2 r^2 v_\theta^{\,2}}{2mr^2}$$

$$\Rightarrow \qquad K = \frac{p_r^{\,2}}{2m} + \frac{L_z^{\,2}}{2mr^2} \qquad \blacksquare$$

L'énergie de l'atome d'hydrogène classique

En mécanique classique, l'atome d'hydrogène stable est considéré comme étant un noyau composé d'un proton de charge positive et d'un électron de charge négative qui circule en équilibre sur une trajectoire circulaire autour du noyau. Dans ce **modèle classique**, **tous** les **rayons d'orbite circulaire** sont **admissibles**. L'énergie E de liaison (négative) du système composée de l'énergie potentielle électrique U_e du système proton-électron et de l'énergie cinétique K de l'électron dépend de la distance r entre l'électron et le proton :



Atome d'hydrogène classique.

$$E = K + U_\mathrm{e} = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r} \qquad \text{où} \qquad r = \frac{L_z^{\,2}}{m_\mathrm{e} k e^2}$$

Ayant une relation le moment cinétique et le rayon de la trajectoire circulaire, effectuons un bilan d'énergie considérant une énergie potentielle électrique U_e et une énergie cinétique K :

$$E = K + U_\mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad E = \left(\frac{p_r^{\,2}}{2m} + \frac{L_z^{\,2}}{2I_z}\right) + \frac{kq_\mathrm{p}q_{\mathrm{e}^-}}{r} \qquad \left(K = \frac{p_r^{\,2}}{2m} + \frac{L_z^{\,2}}{2I_z},\ U_\mathrm{e} = \frac{kQ}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{L_z^{\,2}}{2m_\mathrm{e}r^2} + \frac{kq_\mathrm{p}q_{\mathrm{e}^-}}{r} \qquad \left(p_r = 0 \text{ et } I_z = m_\mathrm{e}r^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\left(\sqrt{m_\mathrm{e}ke^2 r}\right)^2}{2m_\mathrm{e}r^2} + \frac{k(e)(-e)}{r} \qquad \left(\text{Remplacer } L_z = \sqrt{m_\mathrm{e}ke^2 r},\ q_\mathrm{p} = e,\ q_{\mathrm{e}^-} = -e\right)$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\frac{ke^2}{r} - \frac{ke^2}{r} \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad E = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r} \quad \blacksquare \qquad \text{(Regrouper terme)}$$

L'action de l'électromagnétisme en mécanique quantique

En mécanique quantique, plusieurs problèmes furent résolus après l'introduction de la constante de Planck h :

$$h = 6{,}62607004 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

(référence : www.google.ca)

Les unités de cette constante correspondent à ce que l'on nomme en physique une « action ». Une action permet de modifier la configuration d'un système en comptabilisant les variations d'énergie sous un intervalle de temps.

Le **principe de moindre action** invite tout phénomène physique à se réaliser en minimisant l'action requis pour effectuer un changement :

- Puisque h est une constante très petite, les forces électromagnétiques permettent à un système d'effectuer de très petit changement à la fois à une très grande précision (puisque h est très petit).
- Un **changement quantique** est un changement nécessitant un nombre entier très limité d'action h. Ils sont dénombrable unitairement par l'équation $n\,h$ où $n \in \mathrm{N}$. C'est la **mécanique quantique** qui étudie ces changements.
- Un **changement classique** est un changement nécessitant un nombre phénoménal d'action h. Ils ne sont pas dénombrable unitairement car 1 J en 1 s requière environ $1{,}508 \times 10^{33}\,h$. C'est la **mécanique classique** qui étudie ces changements.

L'action du moment cinétique

La constante de Planck h peut être réécrite sous une autre forme qui invite un nouveau concept à être interprété comme étant une action : le moment cinétique L_z.

Preuve :

$$[h] = \mathrm{J \cdot s} \qquad \Rightarrow \qquad [h] = \mathrm{J \cdot s} = (\mathrm{Nm}) \cdot \mathrm{s} = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}^2}\mathrm{m \cdot s} = \mathrm{kg \cdot m^2/s} \qquad \blacksquare$$

Il est important de préciser que $[h] = \mathrm{kg \cdot m^2/s}$ sous cette forme ne correspond pas à des unités de moment cinétique, car une notion de radian est incluse dans le moment cinétique en raison d'une périodicité après un cycle complet.

La constante de Planck réduite $\hbar$

La constante de Planck h utilisé pour évaluer le quanta d'énergie d'un photon peut être réécrite sous la forme d'une constant de Planck réduite $\hbar$ (h barre) où un nouveau quanta peut être associé à l'action du moment cinétique :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}0546 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

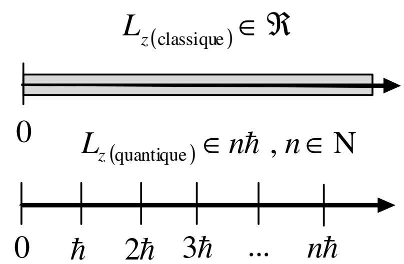
Preuve :

La notion de moment cinétique introduit un concept de périodicité dans un mouvement où un cycle correspond à 2π radians. Démontrons que l'unité du moment cinétique prend la forme de la constante de Planck réduite $\hbar$:

$$[L_z] = [I\omega] = \text{kg}\cdot\text{m}^2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}\,\text{rad}\,\frac{\text{s}}{\text{s}} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2}\,\text{s}\cdot\text{rad} = \text{J}\cdot\text{s}\cdot\text{rad} = [h]\cdot\text{rad}\,\frac{1\,\text{tour}}{2\pi\,\text{rad}} = \frac{[h]}{2\pi} = [\hbar]$$

La quantification du moment cinétique

Puisque la constante de Planck réduite $\hbar$ correspond à l'action du moment cinétique L_z, la mécanique quantique impose la **quantification du moment cinétique**. Ainsi, toute variation de moment cinétique d'une particule doit s'effectuer à « coup de $\hbar$ ». De plus, tous les modules du moment cinétique L_z se doit d'être quantifier et être un multiple entier n de $\hbar$:



$$L_z = n\hbar$$

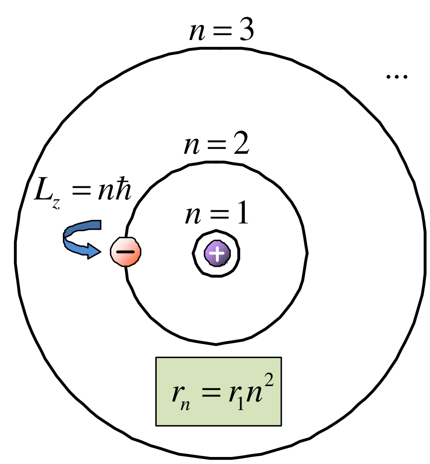
où L_z : Moment cinétique d'une particule ou d'un atome ($\text{J}\cdot\text{s}$)

n : Nombre entier de quanta de moment cinétique ($n \in \mathbb{N}$)

$\hbar$: Constante de Planck réduite, $\hbar = 1{,}0546\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$

L'énergie de l'atome d'hydrogène de Bohr

L'énergie de l'atome d'hydrogène de Bohr réutilise tous les principes du modèle classique (électron non-relativiste), mais impose une contrainte sur les moments cinétiques L_z admissible pour l'électron en interaction avec le proton. Ainsi, la quantification du moment cinétique $L_z = n\hbar$ (contrainte quantique) engendra une quantification des niveaux d'énergie E_n de l'atome. Cette quantification limite alors l'ensemble des rayons des orbites circulaires admissibles :



Atome d'hydrogène de Bohr.

$$E_n = -\frac{E_1}{n^2} \quad \text{avec} \quad L_z = n\hbar \quad \text{et} \quad r_n = r_1 n^2$$

où E_n : Énergie associée à l'atome d'hydrogène dans le niveau n (J)

r_n : Rayon de l'orbite de l'électron dans l'atome d'hydrogène dans le niveau n (m)

n : Niveau d'énergie quantifié de l'atome d'hydrogène ($n \in \mathbb{N}$)

E_1 : Énergie fondamentale de l'atome d'hydrogène, $E_1 = 2{,}18\times10^{-18}\ \text{J} = 13{,}6\ \text{eV}$

r_1 : Rayon de Bohr (rayon de l'orbite fondamentale), $r_1 = 5{,}29^{-11}\ \text{m}$

Preuve :

Appliquons la quantification du moment cinétique $L_z = n\hbar$ afin d'évaluer le rayon r de Bohr :

$$r = \frac{L_z^{\ 2}}{m_e k e^2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{(n\hbar)^2}{m_e k e^2} \qquad \text{(}\textbf{Quantification} : L_z = n\hbar\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad r = r_1 n^2 \quad \blacksquare \text{ (1)} \qquad \text{(Remplacer } r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e k e^2}\text{)}$$

À partir de l'énergie de l'atome d'hydrogène, introduisons la quantification des rayons des orbites r afin de quantifier les niveaux d'énergies E de l'électron autour du proton :

$$E = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r} \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{\left(r_1 n^2\right)} \qquad \text{(}\textbf{Quantification} : r = r_1 n^2\text{)}$$

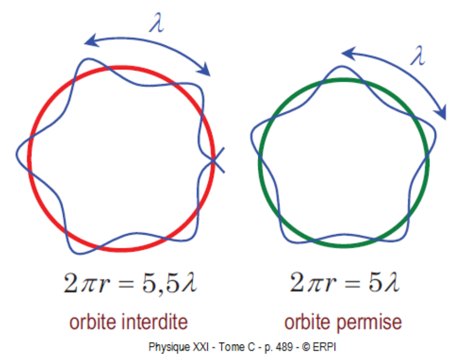
$$\Rightarrow \quad E = -\frac{ke^2}{2r_1}\frac{1}{n^2} \qquad \text{(Regrouper constante)}$$

$$\Rightarrow \quad E = -\frac{E_1}{n^2} \quad \blacksquare \text{ (2)} \qquad \text{(Remplacer } E_1 = \frac{ke^2}{2r_1} = \frac{m_e k^2 e^4}{2\hbar^2}\text{)}$$

La quantification du moment cinétique et longueur d'onde de de Broglie

L'hypothèse de la longueur d'onde de de Broglie peut être également utilisé pour justifier le concept de quantification du moment cinétique d'un électron en interaction avec un proton comme dans le cas d'un atome d'hydrogène.

- $2\pi r \neq N\lambda$: Superposition de l'onde ne se refermant pas sur elle-même « autodétruit » l'onde stationnaire ce qui **interdit l'orbite**.
- $2\pi r = N\lambda$: Superposition de l'onde se refermant sur elle-même « renforce » l'onde stationnaire ce qui **autorise l'orbite**.



On peut interpréter l'électron comme étant une onde stationnaire vibrant sur une orbite autour du noyau. Les orbites admissibles sont celles où il y a résonance.

Preuve :

Démontrons que l'hypothèse de la longueur d'onde de de Broglie appliqué à l'atome d'hydrogène est équivalent à l'hypothèse de la quantification du moment cinétique proposé par Bohr :

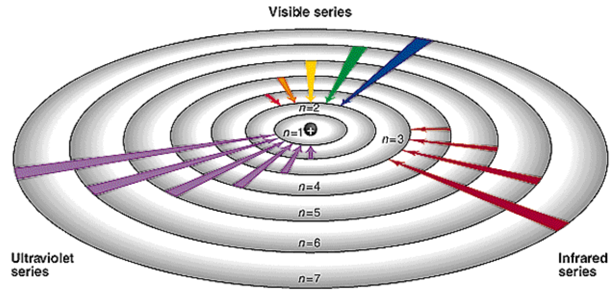
$$2\pi r = n\lambda \quad \Rightarrow \quad 2\pi r = n\frac{h}{p} \qquad \text{(Longueur d'onde : } \lambda = \frac{h}{p}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad p\, r = n\frac{h}{2\pi} \qquad \text{(Réécriture)}$$

$$\Rightarrow \quad L_z = n\hbar \quad \blacksquare \qquad \text{(} L_z = r\,p \text{ et } \hbar = \frac{h}{2\pi}\text{)}$$

Le modèle atomique de l'atome de Rutherford-Bohr

La notion du changement d'état énergétique apporté par Albert Einstein pour expliquer l'effet photoélectrique fut très importante dans l'élaboration du modèle de l'atome de Rutherford-Bohr. Dans ce modèle, les **électrons sont liés au noyau** dans **différents niveaux d'énergies quantifiés** avec une énergie totale (cinétique et potentielle électrique) négative.



https://www4.uwsp.edu/physastr/kmenning/Phys204/Lect35.html
Les transitions électroniques du modèle de Bohr.

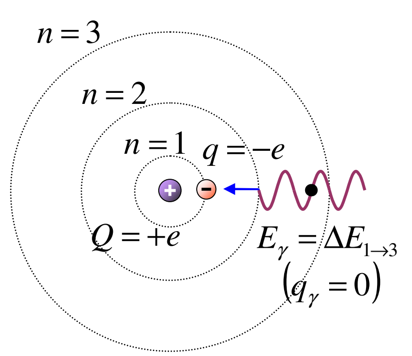
- Un **photon** est **absorbé** par l'atome d'hydrogène lorsque l'électron augmente de niveau d'énergie (nombre quantique ***n*** **augmente**).
- Un **photon** est **émis** de l'atome d'hydrogène lorsque l'électron diminue de niveau d'énergie (nombre quantique ***n*** **diminue**).
- Dans l'atome d'hydrogène, l'énergie de liaison du niveau fondamental est E_1 = -13,6 eV. L'électron sera ionisé (éjecté de l'atome) s'il acquière une énergie totale supérieure à zéro.
- Dans l'atome d'hydrogène, un photon d'énergie supérieure à 13,6 eV (ultraviolet) ionisera automatiquement l'électron de l'atome car $E_n + 13{,}6 \text{ eV} > 0$.

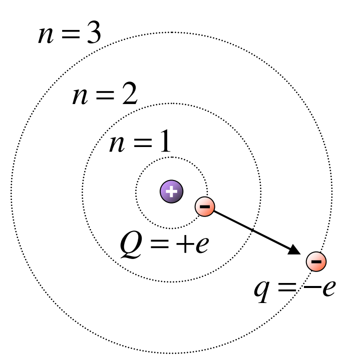
Puisque les niveaux d'énergie sont quantifiés, la transition entre deux niveaux d'énergie s'effectue par l'entremise d'un photon ayant **l'énergie exacte** à la différence d'énergie entre les deux niveaux en jeu :

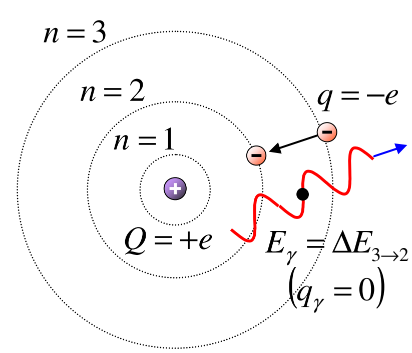
Émission ($E_i > E_f$)	Absorption ($E_f > E_i$)
$E_\gamma = hf = \Delta E_{i\to f} = E_i - E_f$	$E_\gamma = hf = \Delta E_{i\to f} = E_f - E_i$

<u>Exemple :</u> (l'énergie du photon en fonction de sa fréquence est $E_\gamma = hf$)

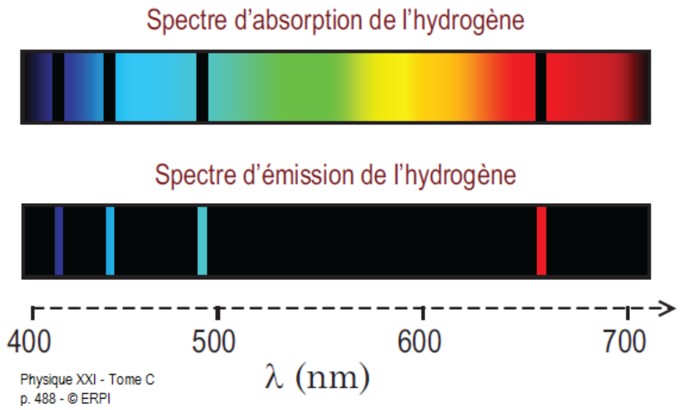
Un photon apporte une énergie au système exactement égale à $E_\gamma = E_3 - E_1$.	L'atome absorbe l'énergie ce qui permet à un électron du niveau d'énergie $n=1$ de passer au niveau $n=3$	L'atome se désexcite passant du niveau $n=3$ au niveau $n=2$. Un photon est alors émit à une énergie $E_\gamma = E_3 - E_2$



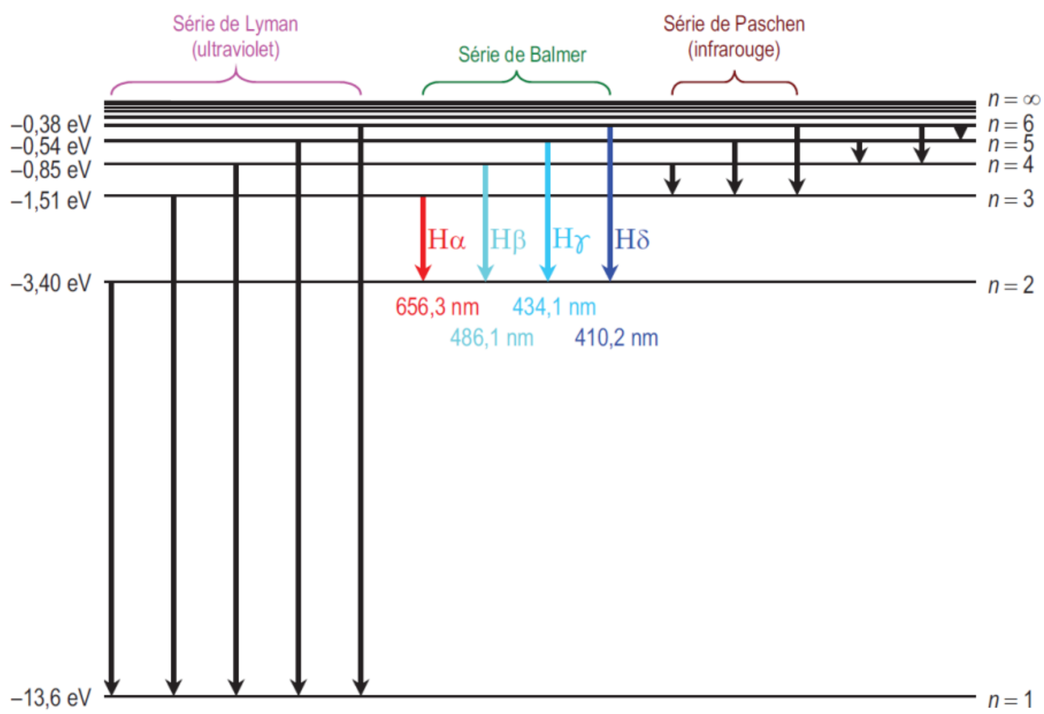




Le spectre d'absorption et d'émission de l'atome d'hydrogène



Le spectre de l'hydrogène et les transitions électroniques de l'atome de Bohr



Exercice

5.5.3 ***Une raie infrarouge.*** On observe qu'un photon infrarouge de 2633 nm est émis par un atome d'hydrogène. **(a)** Déterminez l'énergie de ce photon en joules et en électronvolts. **(b)** Pour que ce photon soit émis, l'électron est-il passé à un niveau d'énergie m plus grand ou plus petit ? **(c)** En vous référant au schéma des niveaux d'énergie de l'hydrogène à la fin de l'exposé de la section, déterminez quelle transition est responsable de l'émission de ce photon. (Il s'agit d'une des transition entre les six premiers niveau d'énergie.

Solution

5.5.3 ***Une raie infrarouge.***

(a) Évaluons l'énergie du photon de 2633 nm :

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad E_\gamma = \frac{\left(6,63\times10^{-34}\right)\left(3\times10^{8}\right)}{\left(2633\times10^{-9}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_\gamma = 7,5541\times10^{-20}\,\mathrm{J}}$$

$$\Rightarrow \quad E_\gamma = 7,5541\times10^{-20}\,\mathrm{J}*\left(\frac{\mathrm{e\,V}}{1,6\times10^{-19}\mathrm{C\,V}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_\gamma = 0,4721\ \mathrm{e\,V}}$$

(b) Puisque l'atome a émis un photon, il perd de l'énergie. Ainsi, l'électron passera à un niveau d'énergie *n* inférieur à son niveau précédent.

En raison du spectre d'émission de l'atome d'hydrogène, un photon dans l'infrarouge correspond à une transition dans les niveau d'énergie $n = \{3,4,5,6\}$. Évaluons le niveau E_4 et E_6 :

$$E_n = -\frac{E_1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad E_4 = -\frac{\left(13,6\ \mathrm{eV}\right)}{\left(4\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_4 = -0,85\ \mathrm{eV}}$$

$$\Rightarrow \quad E_6 = -\frac{\left(13,6\ \mathrm{eV}\right)}{\left(6\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_6 = -0,377\ \mathrm{eV}}$$

(c) Nous constatons que notre photon émis d'énergie $E_\gamma = 0,4721\ \mathrm{e\,V}$ correspond exactement à la transition $n = 6$ vers $n = 4$, car

$$E_{6\to4} = E_4 - E_6 = \left(-0,85\,\mathrm{eV}\right) - \left(-0,377\,\mathrm{eV}\right) = 0,473\ \mathrm{eV} \quad .$$