Chapitre 4.X1 – La transformation relativiste de l'énergie et de la quantité de mouvement

La transformation du facteur de Lorentz

Le facteur de Lorentz est présent dans la majorité des transformations en relativité restreinte. Ce facteur permet d'établir un lien entre deux référentiels mutuellement en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre. Considérons un référentiel **O** correspondant à un objet en mouvement à vitesse $\vec{v}_{\mathrm{OA}}$ par rapport à un référentiel **A** ce qui permet d'obtenir le facteur de Lorentz γ_{OA}. Si le référentiel **A** est en mouvement à vitesse $v_{x\mathrm{AB}}$ selon l'axe x par rapport à un référentiel **B**, alors on peut transformer le facteur de Lorentz γ_{OA} vers le référentiel **B** sous l'expression γ_{OB} à l'aide de la transformation suivante :

$$\gamma_{\mathrm{OB}} = \gamma_{\mathrm{OA}}\gamma_{\mathrm{AB}}\left(1 + v_{x\mathrm{OA}}v_{x\mathrm{AB}} / c^2\right)$$

avec $\gamma_{\mathrm{OB}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - {v_{\mathrm{OB}}}^2 / c^2}}$, $\gamma_{\mathrm{OA}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - {v_{\mathrm{OA}}}^2 / c^2}}$ et $\gamma_{\mathrm{AB}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - {v_{x\mathrm{AB}}}^2 / c^2}}$

et
- v_{OB} : Vitesse d'un objet **O** dans le référentiel **B**.
- v_{OA} : Vitesse d'un objet **O** dans le référentiel **A**.
- $v_{x\mathrm{AB}}$: Vitesse relative du référentiel A par rapport au référentiel **B**.
- c : Vitesse de la lumière, $c = 3\times 10^8\ \mathrm{m/s}$.

<u>Preuve :</u>

Effectuons la réécriture de la vitesse d'un objet **O** par rapport à un référentiel **B** à partir de la vitesse de cet objet **O** par rapport à un référentiel **A** sachant que le référentiel A est en mouvement à vitesse $v_{x\mathrm{AB}}$ par rapport au référentiel **B**. Pour ce faire, nous aurons besoin de la transformation des vitesses parallèles selon l'axe x

$$v_{x\mathrm{B}} = \frac{v_{x\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}}}{1 + \dfrac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\dfrac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}}$$

Ainsi que la transformation des vitesses perpendiculaire selon l'axe y et z

$$v_{y\mathrm{B}} = \frac{v_{y\mathrm{A}}}{\gamma_{\mathrm{AB}}\left(1 + \dfrac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\dfrac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}\right)} \quad \text{et} \quad v_{z\mathrm{B}} = \frac{v_{z\mathrm{A}}}{\gamma_{\mathrm{AB}}\left(1 + \dfrac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\dfrac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}\right)} \; .$$

Ainsi, nous avons l'expression suivante pour v_{B}^2 :

$$v_{\mathrm{B}}^2 = v_{x\mathrm{B}}^2 + v_{y\mathrm{B}}^2 + v_{z\mathrm{B}}^2 \qquad \text{(Décomposition } xyz \text{ de la vitesse selon B)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}}^2 = \left(\frac{v_{x\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}}}{1 + \frac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\frac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}} \right)^2 + v_{y\mathrm{B}}^2 + v_{z\mathrm{B}}^2 \qquad \text{(Transformation vitesse parallèle selon } x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}}^2 = \left(\frac{v_{x\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}}}{1 + \frac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\frac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}} \right)^2 + \left(\frac{v_{y\mathrm{A}}}{\gamma_{\mathrm{AB}}\left(1 + \frac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\frac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}\right)} \right)^2 + \left(\frac{v_{z\mathrm{A}}}{\gamma_{\mathrm{AB}}\left(1 + \frac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\frac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}\right)} \right)^2 \qquad \text{(Trans. vitesse perpendi.)}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} v_{\mathrm{B}}^2 = {} & \frac{v_{x\mathrm{A}}^2}{\left(1 + \frac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\frac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}\right)^2} + \frac{2 v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{\left(1 + \frac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\frac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}\right)^2} + \frac{v_{x\mathrm{AB}}^2}{\left(1 + \frac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\frac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}\right)^2} \\ & + \frac{v_{y\mathrm{A}}^2}{\gamma_{\mathrm{AB}}^2\left(1 + \frac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\frac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}\right)^2} + \frac{v_{z\mathrm{A}}^2}{\gamma_{\mathrm{AB}}^2\left(1 + \frac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\frac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}\right)^2} \end{aligned} \qquad \text{(Développer les carrés)}$$

Effectuons le changement de variable

$$U = \left(1 + \frac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\frac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}\right)^2$$

Pour simplifier notre expression de v_{B}^2 et utilisons l'identité en relativité

$$\gamma_{\mathrm{AB}}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_{x\mathrm{AB}}^2 / c^2}} \right)^2 = \frac{1}{1 - v_{x\mathrm{AB}}^2 / c^2} = \frac{c^2}{c^2 - v_{x\mathrm{AB}}^2} \quad .$$

Ainsi, nous obtenons l'expression suivante :

$$v_{\mathrm{B}}^2 = \frac{v_{x\mathrm{A}}^2}{U} + \frac{2 v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{U} + \frac{v_{x\mathrm{AB}}^2}{U} + \frac{v_{y\mathrm{A}}^2}{\gamma_{\mathrm{AB}}^2 U} + \frac{v_{z\mathrm{A}}^2}{\gamma_{\mathrm{AB}}^2 U} \qquad \text{(Expression avec } U\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}}^2 = \frac{v_{x\mathrm{A}}^2}{U} + \frac{2 v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{U} + \frac{v_{x\mathrm{AB}}^2}{U} + \frac{v_{y\mathrm{A}}^2}{\left(\frac{c^2}{c^2 - v_{x\mathrm{AB}}^2}\right)U} + \frac{v_{z\mathrm{A}}^2}{\left(\frac{c^2}{c^2 - v_{x\mathrm{AB}}^2}\right)U} \qquad \text{(Identité } \gamma_{\mathrm{AB}}^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}}^2 = \frac{v_{x\mathrm{A}}^2}{U} + \frac{2 v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{U} + \frac{v_{x\mathrm{AB}}^2}{U} + \frac{v_{y\mathrm{A}}^2 \left(c^2 - v_{x\mathrm{AB}}^2\right)}{c^2 U} + \frac{v_{z\mathrm{A}}^2 \left(c^2 - v_{x\mathrm{AB}}^2\right)}{c^2 U} \qquad \text{(Simplification dénomi.)}$$

Effectuons la distribution des numérateurs et continuons la simplification :

$$v_{\mathrm{B}}{}^{2} = \frac{v_{x\mathrm{A}}{}^{2}}{U} + \frac{2v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}}}{U} + \frac{v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}}{U} + \frac{v_{y\mathrm{A}}{}^{2}\left(c^{2} - v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}\right)}{c^{2}U} + \frac{v_{z\mathrm{A}}{}^{2}\left(c^{2} - v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}\right)}{c^{2}U} \qquad \text{(eq précé.)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}}{}^{2} = \frac{1}{c^{2}U}\left[c^{2}v_{x\mathrm{A}}{}^{2} + 2c^{2}v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}} + c^{2}v_{x\mathrm{AB}}{}^{2} + v_{y\mathrm{A}}{}^{2}\left(c^{2} - v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}\right) + v_{z\mathrm{A}}{}^{2}\left(c^{2} - v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}\right)\right] \qquad \text{(Factoriser)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}}{}^{2} = \frac{1}{c^{2}U}\left[c^{2}v_{x\mathrm{A}}{}^{2} + 2c^{2}v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}} + c^{2}v_{x\mathrm{AB}}{}^{2} + c^{2}v_{y\mathrm{A}}{}^{2} - v_{y\mathrm{A}}{}^{2}v_{x\mathrm{AB}}{}^{2} + c^{2}v_{z\mathrm{A}}{}^{2} - v_{z\mathrm{A}}{}^{2}v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}\right] \qquad \text{(Distribuer)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}}{}^{2} = \frac{1}{c^{2}U}\left[c^{2}\left(v_{x\mathrm{A}}{}^{2} + v_{y\mathrm{A}}{}^{2} + v_{z\mathrm{A}}{}^{2}\right) + 2c^{2}v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}} + c^{2}v_{x\mathrm{AB}}{}^{2} - v_{y\mathrm{A}}{}^{2}v_{x\mathrm{AB}}{}^{2} - v_{z\mathrm{A}}{}^{2}v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}\right] \qquad \text{(Factoriser } c^{2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}}{}^{2} = \frac{1}{c^{2}U}\left[c^{2}v_{\mathrm{A}}{}^{2} + 2c^{2}v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}} + c^{2}v_{x\mathrm{AB}}{}^{2} - v_{y\mathrm{A}}{}^{2}v_{x\mathrm{AB}}{}^{2} - v_{z\mathrm{A}}{}^{2}v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}\right] \qquad (v_{\mathrm{A}}{}^{2} = v_{x\mathrm{A}}{}^{2} + v_{y\mathrm{A}}{}^{2} + v_{z\mathrm{A}}{}^{2})$$

$$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}}{}^{2} = \frac{1}{c^{2}U}\left[c^{2}v_{\mathrm{A}}{}^{2} + 2c^{2}v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}} + v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}\left(c^{2} - v_{y\mathrm{A}}{}^{2} - v_{z\mathrm{A}}{}^{2}\right)\right] \qquad \text{(Factoriser } v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}\text{)}$$

Développons maintenant l'expression de U :

$$U = \left(1 + \frac{v_{x\mathrm{A}}}{c}\frac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}\right)^{2} \quad \Rightarrow \quad U = \left(\frac{c^{2} + v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}}}{c^{2}}\right)^{2} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{\left(c^{2} + v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}}\right)^{2}}{c^{4}}$$

Remplaçons le développement de U dans notre équation de $v_{\mathrm{B}}{}^{2}$:

$$v_{\mathrm{B}}{}^{2} = \frac{1}{c^{2}U}\left[c^{2}v_{\mathrm{A}}{}^{2} + 2c^{2}v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}} + v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}\left(c^{2} - v_{y\mathrm{A}}{}^{2} - v_{z\mathrm{A}}{}^{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}}{}^{2} = \frac{1}{c^{2}\left(\dfrac{\left(c^{2} + v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}}\right)^{2}}{c^{4}}\right)}\left[c^{2}v_{\mathrm{A}}{}^{2} + 2c^{2}v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}} + v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}\left(c^{2} - v_{y\mathrm{A}}{}^{2} - v_{z\mathrm{A}}{}^{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{B}}{}^{2} = c^{2}\,\frac{c^{2}v_{\mathrm{A}}{}^{2} + 2c^{2}v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}} + v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}\left(c^{2} - v_{y\mathrm{A}}{}^{2} - v_{z\mathrm{A}}{}^{2}\right)}{\left(c^{2} + v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}}\right)^{2}}$$

Remplaçons maintenant l'expression de $v_{\mathrm{B}}{}^{2}$ dans γ_{B} :

$$\gamma_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\mathrm{B}}{}^{2}/c^{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\sqrt{1 - c^{2}\,\dfrac{c^{2}v_{\mathrm{A}}{}^{2} + 2c^{2}v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}} + v_{x\mathrm{AB}}{}^{2}\left(c^{2} - v_{y\mathrm{A}}{}^{2} - v_{z\mathrm{A}}{}^{2}\right)}{\left(c^{2} + v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}}\right)^{2}}/c^{2}}} \qquad \text{(Remplacer } v_{\mathrm{B}}{}^{2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{c^2 v_{\mathrm{A}}{}^2 + 2c^2 v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}} + v_{x\mathrm{AB}}{}^2 \left(c^2 - v_{y\mathrm{A}}{}^2 - v_{z\mathrm{A}}{}^2\right)}{\left(c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}\right)^2}}} \qquad \text{(Simplifier } c^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\left(c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}\right)^2 - \left(c^2 v_{\mathrm{A}}{}^2 + 2c^2 v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}} + v_{x\mathrm{AB}}{}^2 \left(c^2 - v_{y\mathrm{A}}{}^2 - v_{z\mathrm{A}}{}^2\right)\right)}{\left(c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}\right)^2}}} \qquad \text{(Dén. com.)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{\sqrt{\left(c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}\right)^2 - \left(c^2 v_{\mathrm{A}}{}^2 + 2c^2 v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}} + v_{x\mathrm{AB}}{}^2 \left(c^2 - v_{y\mathrm{A}}{}^2 - v_{z\mathrm{A}}{}^2\right)\right)}} \qquad \text{(Inverser frac. et effec. racine)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{\sqrt{\left(c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}\right)^2 - c^2 v_{\mathrm{A}}{}^2 - 2c^2 v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}} + v_{x\mathrm{AB}}{}^2 \left(-c^2 + v_{y\mathrm{A}}{}^2 + v_{z\mathrm{A}}{}^2\right)}} \qquad \text{(Distribuer le négatif)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{\sqrt{\left(c^4 + 2c^2 v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}} + v_{x\mathrm{A}}{}^2 v_{x\mathrm{AB}}{}^2\right) - c^2 v_{\mathrm{A}}{}^2 - 2c^2 v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}} + v_{x\mathrm{AB}}{}^2 \left(-c^2 + v_{y\mathrm{A}}{}^2 + v_{z\mathrm{A}}{}^2\right)}} \qquad \text{(Dével. le carré)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{\sqrt{c^4 + v_{x\mathrm{A}}{}^2 v_{x\mathrm{AB}}{}^2 - c^2 v_{\mathrm{A}}{}^2 + v_{x\mathrm{AB}}{}^2 \left(-c^2 + v_{y\mathrm{A}}{}^2 + v_{z\mathrm{A}}{}^2\right)}} \qquad \text{(Simplifier } 2c^2 v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{\sqrt{c^4 - c^2 v_{\mathrm{A}}{}^2 + v_{x\mathrm{AB}}{}^2 \left(-c^2 + v_{x\mathrm{A}}{}^2 + v_{y\mathrm{A}}{}^2 + v_{z\mathrm{A}}{}^2\right)}} \qquad \text{(Factoriser } v_{x\mathrm{AB}}{}^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{\sqrt{c^4 - c^2 v_{\mathrm{A}}{}^2 + v_{x\mathrm{AB}}{}^2 \left(-c^2 + v_{\mathrm{A}}{}^2\right)}} \qquad \left(v_{\mathrm{A}}{}^2 = v_{x\mathrm{A}}{}^2 + v_{y\mathrm{A}}{}^2 + v_{z\mathrm{A}}{}^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{\sqrt{c^4 - c^2 v_{\mathrm{A}}{}^2 - c^2 v_{x\mathrm{AB}}{}^2 + v_{\mathrm{A}}{}^2 v_{x\mathrm{AB}}{}^2}} \qquad \text{(Distribuer } v_{x\mathrm{AB}}{}^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{\sqrt{\left(c^2 - v_{x\mathrm{AB}}{}^2\right)\left(c^2 - v_{\mathrm{A}}{}^2\right)}} \qquad \text{(Compléter le carré)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{\sqrt{\left(c^2 - v_{x\mathrm{AB}}{}^2\right)}\sqrt{\left(c^2 - v_{\mathrm{A}}{}^2\right)}} \qquad \text{(Séparer racine)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{\sqrt{c^2\left(1 - \dfrac{v_{x\mathrm{AB}}{}^2}{c^2}\right)}\sqrt{c^2\left(1 - \dfrac{v_{\mathrm{A}}{}^2}{c^2}\right)}} \qquad \text{(Factoriser } c^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{B}} = \frac{c^2 + v_{x\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{c^2\sqrt{1 - \dfrac{v_{x\mathrm{AB}}{}^2}{c^2}}\sqrt{1 - \dfrac{v_{\mathrm{A}}{}^2}{c^2}}} \qquad \text{(Factoriser terme } c^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{B} = \frac{1 + v_{xA} v_{xAB} / c^{2}}{\sqrt{1 - \frac{v_{xAB}^{2}}{c^{2}}}\sqrt{1 - \frac{v_{A}^{2}}{c^{2}}}} \qquad \text{(Simplifier } c^{2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_{B} = \gamma_{A} \gamma_{AB} \left(1 + v_{xA} v_{xAB} / c^{2}\right) \quad \blacksquare \qquad \left(\gamma_{A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{xA}^{2}}{c^{2}}}} \text{ et } \gamma_{AB} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{xAB}^{2}}{c^{2}}}} \right)$$

Transformation de Lorentz de l'énergie

En relativité restreinte, la transformation de l'énergie E_{A} d'une particule d'un référentiel **A** vers un référentiel **B** tel que le référentiel **A** est en mouvement à vitesse v_{xAB} par rapport au référentiel **B** nécessite également la quantité de mouvement p_{xA} selon le référentiel **A** :

$$E_{B} = \gamma_{AB} \left(E_{A} + v_{xAB} p_{xA}\right)$$

où E_{B} : Énergie d'une particule selon un référentiel **B** (J).

E_{A} : Énergie d'une particule selon un référentiel **A** (J).

p_{xA} : Quantité de mouvement d'une particule selon un référentiel **A** ($\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$).

v_{xAB} : Vitesse relative du référentiel **A** par rapport au référentiel **B**.

γ_{AB} : Facteur de Lorentz pour transformer d'un référentiel **A** vers **B** ($\gamma_{AB} = 1 / \sqrt{1 - v_{xAB} / c^{2}}$).

<u>Preuve :</u>

Soit une particule libre de masse *m* se déplaçant à vitesse $\vec{v}_{A}$ selon un référentiel **A**. On peut déterminer son énergie par l'expression

$$E_{A} = \gamma_{A} m c^{2} \quad \text{où} \quad \gamma_{A} = \frac{1}{\sqrt{1 - {v_{A}}^{2} / c^{2}}} \quad .$$

Dans un référentiel **B** observant cette même particule libre en mouvement à vitesse $\vec{v}_{B}$ selon son référentiel, on peut déterminer son énergie par l'expression

$$E_{B} = \gamma_{B} m c^{2} \quad \text{où} \quad \gamma_{B} = \frac{1}{\sqrt{1 - {v_{B}}^{2} / c^{2}}} \quad .$$

Sachant que le référentiel **A** est en mouvement à une vitesse relative v_{xAB} selon l'axe *x* par rapport au référentiel B, évaluons l'énergie E_{B} à partir de E_{A} en utilisant la transformation du facteur de Lorentz :

$$E_{B} = \gamma_{B} m c^{2} \quad \Rightarrow \quad E_{B} = \left(\gamma_{A} \gamma_{AB} \left(1 + v_{xA} v_{xAB} / c^{2}\right)\right) m c^{2} \qquad \text{(Remplacer } \gamma_{B} = \gamma_{A} \gamma_{AB} \left(1 + v_{xA} v_{xAB} / c^{2}\right)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad E_{B} = \gamma_{AB} \left(\gamma_{A} m c^{2} + \gamma_{A} v_{xA} m v_{xAB}\right) \qquad \text{(Distribution)}$$

$$\Rightarrow \quad E_{B} = \gamma_{AB} \left(E_{A} + v_{xAB} p_{xA}\right) \quad \blacksquare \qquad \left(E_{A} = \gamma_{A} m c^{2} \text{ et } p_{xA} = \gamma_{A} m v_{xA} \right)$$

Transformation de Lorentz de la quantité de mouvement

En relativité restreinte, la transformation de la quantité de mouvement $p_{x\mathrm{A}}$ d'une particule d'un référentiel **A** vers un référentiel **B** tel que le référentiel **A** est en mouvement à vitesse $v_{x\mathrm{AB}}$ par rapport au référentiel **B** nécessite également l'énergie E_A de la particule selon le référentiel **A** :

$$p_{x\mathrm{B}} = \gamma_\mathrm{AB}\left(p_{x\mathrm{A}} + \frac{v_{x\mathrm{AB}}E_\mathrm{A}}{c^2}\right)$$

où $p_{x\mathrm{B}}$: Quantité de mouvement d'une particule selon un référentiel **B** ($\mathrm{kg \cdot m/s}$).
$p_{x\mathrm{A}}$: Quantité de mouvement d'une particule selon un référentiel **A** ($\mathrm{kg \cdot m/s}$).
E_A : Énergie d'une particule selon un référentiel **A** (J).
$v_{x\mathrm{AB}}$: Vitesse relative du référentiel **A** par rapport au référentiel **B**.
γ_AB : Facteur de Lorentz pour transformer d'un référentiel **A** vers **B** ($\gamma_\mathrm{AB} = 1/\sqrt{1 - v_{x\mathrm{AB}}/c^2}$).
c : Vitesse de la lumière, $c = 3\times10^8\ \mathrm{m/s}$.

Preuve :

Soit une particule libre de masse *m* se déplaçant à vitesse $\vec{v}_\mathrm{A}$ selon un référentiel **A**. On peut déterminer son énergie et sa quantité de mouvement par les expressions

$$E_\mathrm{A} = \gamma_\mathrm{A} m c^2 \quad , \quad p_{x\mathrm{A}} = \gamma_\mathrm{A} m v_{x\mathrm{A}} \quad , \quad p_{y\mathrm{A}} = \gamma_\mathrm{A} m v_{y\mathrm{A}} \quad \text{et} \quad p_{z\mathrm{A}} = \gamma_\mathrm{A} m v_{z\mathrm{A}} \quad \text{où} \quad \gamma_\mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{1 - {v_\mathrm{A}}^2/c^2}} \ .$$

Dans un référentiel **B** observant cette même particule libre en mouvement à vitesse $\vec{v}_\mathrm{B}$ selon son référentiel, on peut déterminer son énergie et sa quantité de mouvement par les expressions

$$E_\mathrm{B} = \gamma_\mathrm{B} m c^2 \quad , \quad p_{x\mathrm{B}} = \gamma_\mathrm{B} m v_{x\mathrm{B}} \quad , \quad p_{y\mathrm{B}} = \gamma_\mathrm{B} m v_{y\mathrm{B}} \quad \text{et} \quad p_{z\mathrm{B}} = \gamma_\mathrm{B} m v_{z\mathrm{B}} \quad \text{où} \quad \gamma_\mathrm{B} = \frac{1}{\sqrt{1 - {v_\mathrm{B}}^2/c^2}} \ .$$

Utilisons la transformation du facteur de Lorentz afin d'exprimer $p_{x\mathrm{B}}$ à partir des mesures selon le référentiel **A** :

$$p_{x\mathrm{B}} = \gamma_\mathrm{B} m v_{x\mathrm{B}}$$

$$\Rightarrow \quad p_{x\mathrm{B}} = \left(\gamma_\mathrm{A}\,\gamma_\mathrm{AB}\left(1 + v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}}/c^2\right)\right) m v_{x\mathrm{B}} \qquad \text{(Remplacer } \gamma_\mathrm{B} = \gamma_\mathrm{A}\,\gamma_\mathrm{AB}\left(1 + v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}}/c^2\right)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad p_{x\mathrm{B}} = \gamma_\mathrm{A}\,\gamma_\mathrm{AB}\left(1 + v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}}/c^2\right) m\left(\left(\frac{v_{x\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}}}{1 + v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}}/c^2}\right)\right) \qquad \text{(Remplacer } v_{x\mathrm{B}} = \frac{v_{x\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}}}{1 + v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}}/c^2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad p_{x\mathrm{B}} = \gamma_\mathrm{A}\,\gamma_\mathrm{AB} m\left(v_{x\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}}\right) \qquad \text{(Simplifier terme } 1 + v_{x\mathrm{A}}v_{x\mathrm{AB}}/c^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad p_{x\mathrm{B}} = \gamma_\mathrm{AB}\left(\gamma_\mathrm{A} m v_{x\mathrm{A}} + \gamma_\mathrm{A} m v_{x\mathrm{AB}}\right) \qquad \text{(Distribuer } \gamma_\mathrm{A}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad p_{x\mathrm{B}} = \gamma_\mathrm{AB}\left(\gamma_\mathrm{A} m v_{x\mathrm{A}} + \frac{v_{x\mathrm{AB}}\,\gamma_\mathrm{A} m c^2}{c^2}\right) \qquad \text{(Multiplier par } c^2/c^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad p_{x\mathrm{B}} = \gamma_\mathrm{AB}\left(p_{x\mathrm{A}} + \frac{v_{x\mathrm{AB}}E_\mathrm{A}}{c^2}\right) \quad \blacksquare \qquad \text{(} E_\mathrm{A} = \gamma_\mathrm{A} m c^2 \text{ et } p_{x\mathrm{A}} = \gamma_\mathrm{A} m v_{x\mathrm{A}}\text{)}$$