Chapitre 4.9b – La mécanique relativiste

La 2e loi de Newton en relativité

En mécanique classique, l'accélération d'un objet est proportionnelle à la somme des forces appliquées sur l'objet et inversement proportionnelle à son inertie tel que

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad .$$

En mécanique relativiste, cette relation n'est plus valide, car la vitesse de l'objet influence l'efficacité de l'accélération par l'intermédiaire d'un facteur γ. La 2e loi de Newton en mécanique relativiste prendra alors la forme suivante :

$$\sum \vec{F} = \gamma m \vec{a} + \gamma^3 m \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v}$$

où $\vec{F}$: Force appliquée sur l'objet mesurée dans le référentiel (N)

m : Masse de l'objet mesurée au repos (kg)

$\vec{a}$: Accélération de l'objet dans le référentiel (m/s^2)

γ : Le facteur gamma avec vitesse de l'objet ($\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$)

$\vec{v}$: Vitesse de l'objet mesurée dans le référentiel (m/s) ($v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$)

c : Vitesse de la lumière ($c = 3\times 10^8\ \text{m/s}$)

<u>Preuve :</u>

Pour démontrer la 2e loi de Newton en relativité, nous aurons besoin de la règle de la dérivée en chaîne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(XY) = Y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X + X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y \quad .$$

Débutons notre preuve à l'aide de la définition de la 2e loi de Newton :

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{\mathrm{d}(\gamma m \vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Remplacer } \vec{p} = \gamma m \vec{v}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = m\frac{\mathrm{d}(\gamma \vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Factoriser } m \text{ de la dérivée, car } m \text{ est constant selon } t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = m\left(\vec{v}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + \gamma\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right) \qquad \text{(Dérivée en chaîne : } \gamma = \gamma(t) \text{ et } \vec{v} = \vec{v}(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = m\left(\vec{v}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + \gamma\vec{a}\right) \qquad \text{(Définition de l'accélération : } \vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \gamma m \vec{a} + m\vec{v}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}} \qquad \text{(Distribuer } m\text{)}$$

Pour réaliser la dérivée du facteur γ, nous aurons besoin de la règle de dérivée d'un quotient : (nous utiliserons la version de droite)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{X}{Y}\right)=\frac{Y\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}-X\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}}{Y^2} \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{Y}\right)=-\frac{1}{Y^2}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} \text{ lorsque } X=1$$

Évaluons la dérivée du facteur γ par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$ (Remplacer $\gamma=1/\sqrt{1-v^2/c^2}$)

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)$$ (Règle de la dérivée d'un quotient)

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{-1}{1-v^2/c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)$$ (Simplifier la racine)

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{-1}{1-v^2/c^2}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-v^2/c^2\right)$$ (Appliquer $\dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x}=nx^{n-1}$)

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{-1}{2\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-v^2/c^2\right)$$ (Mettre terme $1-{v_x}^2/c^2$ en commun)

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{-\gamma^3}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-v^2/c^2\right)$$ (Remplacer $\gamma^3=1/\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}$)

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{-\gamma^3}{2}\left[-\frac{2v}{c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v)\right]$$ (Appliquer $\dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x}=nx^{n-1}$, c est constant)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{\gamma^3 v}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}$$ (Simplification)

Évaluons maintenant la dérivée du module de la vitesse v par rapport au temps. Réécrivons le module de la vitesse à l'aide de la définition du produit scalaire :

$$v=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$ ($v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$)

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)$$ (Calculer $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$)

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$ (Appliquer $\dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x}=nx^{n-1}$)

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2v}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$ (Remplacer $v=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$)

Effectuons la dérivée en chaîne du produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{v}$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2v}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2v}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)$$ (Dérivée en chaîne : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(XY\right)=Y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X+X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y$)

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2v}\left(\vec{a}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{a}\right)$$ (Définition de l'accélération : $\vec{a}=\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$)

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2v}\left(\vec{v}\cdot\vec{a}+\vec{v}\cdot\vec{a}\right)$$ (Commutativité du produit scalaire)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}}$$ (Simplification du facteur 2)

Introduisons ce résultat dans notre équation précédente et simplifions notre expression :

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{\gamma^3 v}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{\gamma^3 v}{c^2}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}\right)$$ (Remplacer $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{\gamma^3\,\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}}$$ (Simplifier v)

Introduisons ce dernier résultat dans notre équation initiale et manipulons l'expression afin de retrouver la forme désirée :

$$\vec{F}=\gamma m\vec{a}+m\vec{v}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}=\gamma m\vec{a}+m\vec{v}\left(\frac{\gamma^3\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)$$ (Remplacer $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t$)

$$\Rightarrow \quad \vec{F}=\gamma m\vec{a}+\gamma^3 m\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} \quad \blacksquare$$ (Réécriture)

Remarque : L'orientation de l'accélération $\vec{a}$ n'est plus parallèle à la force $\vec{F}$, car elle dépend du module et de l'orientation la vitesse $\vec{v}$ de l'objet.

La 2e loi de Newton en relativité à une dimension : force parallèle

La définition précédente de la 2e loi de Newton est la plus générale, car elle est exprimée vectoriellement. Lorsqu'un objet se déplace seulement selon l'axe x et qu'il subit la présence d'une force alignée uniquement selon l'axe x (force parallèle à la vitesse), alors la 2e loi de Newton se simplifie à une équation à une dimension :

$$F_x = \gamma_x{}^3 m a_x$$

où F_x : Force appliquée sur l'objet mesurée dans le référentiel (N)

m : Masse de l'objet mesurée au repos (kg)

a_x : Accélération de l'objet selon l'axe x dans le référentiel (m/s^2)

γ_x : Le facteur gamma avec vitesse de l'objet selon l'axe x ($\gamma_x = 1/\sqrt{1-v_x{}^2/c^2}$)

v_x : Vitesse de l'objet selon l'axe x mesurée dans le référentiel (m/s)

c : Vitesse de la lumière ($c = 3\times 10^8\ \text{m/s}$)

Preuve :

À partir de la 2e loi de Newton relativiste vectorielle, réduisons cette équation à l'application d'une force selon l'axe x sachant que l'objet se déplace uniquement selon l'axe x. Les termes suivants changeront d'écriture :

$$\vec{F} \to F_x \qquad \gamma \to \gamma_x \qquad \vec{v} \to v_x \qquad \vec{a} \to a_x \qquad \vec{v}\cdot\vec{a} \to v_x a_x$$

Alors :

$$\vec{F} = \gamma m \vec{a} + \gamma^3 m \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v}$$ (2ième loi de Newton relativiste)

$$\Rightarrow \quad F_x = \gamma_x m a_x + \gamma_x{}^3 m \frac{v_x a_x}{c^2} v_x$$ (Remplacer les termes)

$$\Rightarrow \quad F_x = \gamma_x m a_x + \gamma_x{}^3 m a_x \frac{v_x{}^2}{c^2}$$ (Simplification et réécriture)

$$\Rightarrow \quad F_x = \gamma_x{}^3 m a_x \left(\frac{1}{\gamma_x{}^2} + \frac{v_x{}^2}{c^2} \right)$$ (Factoriser $\gamma_x{}^3 m a_x$)

$$\Rightarrow \quad F_x = \gamma_x{}^3 m a_x \left(\frac{c^2 - v_x{}^2}{c^2} + \frac{v_x{}^2}{c^2} \right)$$ (Utiliser l'identité[1] : $\gamma_x{}^2 = \dfrac{c^2}{c^2 - v_x{}^2}$)

$$\Rightarrow \quad F_x = \gamma_x{}^3 m a_x \quad \blacksquare$$ (Simplification)

[1] Cette identité fut démontrée dans le chapitre 4.4.

La 2e loi de Newton en relativité à une dimension : force perpendiculaire

Lorsqu'un objet se déplace seulement selon l'axe *x* et qu'il subit la présence d'une force alignée uniquement selon l'axe *y* (force perpendiculaire à la vitesse), alors la 2e loi de Newton se simplifie à une équation à une dimension :

$$F_y = \gamma_x m a_y$$

où F_y : Force appliquée sur l'objet selon l'axe *y* mesurée dans le référentiel (N)

m : Masse de l'objet mesurée au repos (kg)

a_y : Accélération de l'objet selon l'axe *y* (m/s^2)

γ_x : Le facteur gamma avec vitesse de l'objet selon l'axe *x* ($\gamma_x = 1/\sqrt{1 - {v_x}^2 / c^2}$)

v_x : Vitesse de l'objet selon l'axe *x* mesurée dans le référentiel (m/s)

c : Vitesse de la lumière ($c = 3\times 10^8\ \text{m/s}$)

<u>Preuve :</u>

Considérons un objet se déplaçant à vitesse v_x selon l'axe *x* et subissant une force F_y selon l'axe y perpendiculairement au sens de la vitesse. Évaluons la relation entre la force et l'accélération à partir de la 2ième loi de Newton relativiste :

$$\vec{F} \rightarrow F_y \vec{j} \qquad \gamma \rightarrow \gamma_x \qquad \vec{v} \rightarrow v_x \vec{i} \qquad \vec{a} \rightarrow a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \qquad \vec{v}\cdot\vec{a} \rightarrow v_x a_x$$

Alors :

$$\vec{F} = \gamma m \vec{a} + \gamma^3 m \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} \qquad \text{(2ième loi de Newton relativiste)}$$

$$\Rightarrow \quad F_y \vec{j} = \gamma_x m\left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}\right) + {\gamma_x}^3 m \frac{v_x a_x}{c^2} v_x \vec{i} \qquad \text{(Remplacer les termes)}$$

$$\Rightarrow \quad F_y \vec{j} = \left(\gamma_x m a_x + {\gamma_x}^3 m \frac{v_x a_x}{c^2} v_x\right)\vec{i} + \gamma_x m a_y \vec{j} \qquad \text{(Isoler terme } \vec{i} \text{ et } \vec{j}\text{)}$$

Puisque le côté gauche de l'équation est uniquement défini selon l'axe *y*, le côté droit de l'équation se doit d'avoir un terme nul selon l'axe *x*. Ainsi, nous pouvons affirmer que :

$$\gamma_x m a_x + {\gamma_x}^3 m \frac{v_x a_x}{c^2} v_x = 0$$

Ainsi, nous avons l'équation suivante qui peut être généralisée à toute forme de force perpendiculaire à la vitesse :

$$F_y \vec{j} = \gamma_x m a_y \vec{j} \qquad \text{(Usage } \gamma_x m a_x + {\gamma_x}^3 m \frac{v_x a_x}{c^2} v_x = 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad F_y = \gamma_x m a_y \ \blacksquare \qquad \text{(Simplifier } \vec{j}\text{)}$$

L'énergie cinétique en relativité

À partir de la 2e loi de Newton sous sa forme relativiste et de la définition du travail, nous pouvons évaluer l'augmentation de l'énergie cinétique d'un objet soumis à une force appliquée sur un déplacement :

$$K = (\gamma - 1)mc^2$$

où K : Énergie cinétique relativiste (J)

m : Masse de l'objet au repos (kg)

γ : Le facteur gamma avec vitesse de l'objet ($\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$)

v : Vitesse de la particule (m/s)

c : Vitesse de la lumière ($c = 3\times 10^8\ \mathrm{m/s}$)

Preuve :

Débutons notre preuve avec la définition du travail et appliquons cette définition avec une force $\vec{F}$ parallèle au déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\vec{s}$ le long de l'axe x. Supposons que la vitesse est uniquement selon l'axe x. Ainsi notre expression générale de γ passera à γ_x :

$W = \int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$ $\Rightarrow$ $W = \int (F_x \vec{i})\cdot(\mathrm{d}x\,\vec{i})$ (Remplacer $\vec{F} = F_x\vec{i}$, $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}x\,\vec{i}$)

$\Rightarrow$ $W = \int F_x \mathrm{d}x$ (Effectuer le produit scalaire)

$\Rightarrow$ $W = \int \gamma_x{}^3 m a_x \mathrm{d}x$ (Remplacer $F_x = \gamma_x{}^3 m a_x$)

$\Rightarrow$ $W = \int \gamma_x{}^3 m \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x$ (Définition de l'accélération : $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$)

$\Rightarrow$ $W = \int \gamma_x{}^3 m\,\mathrm{d}v_x \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ (Appliquer à $\mathrm{d}x$ la dérivée du temps)

$\Rightarrow$ $W = \int \gamma_x{}^3 m\,\mathrm{d}v_x\, v_x$ (Définition de la vitesse : $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$)

$\Rightarrow$ $\boxed{W = \int \dfrac{m v_x}{\left(1 - v_x{}^2/c^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}v_x}$ (Remplacer $\gamma_x = 1/\sqrt{1 - v_x{}^2/c^2}$)

Par définition, un objet qui possède une vitesse initiale nulle ne possède pas d'énergie cinétique. Appliquons notre travail W sur une particule initialement nulle et établissons une relation entre le travail et l'énergie cinétique finale :

$W = \Delta K$ $\Rightarrow$ $W = K_f - K_i$ (Remplacer $\Delta K = K - K_i$)

$\Rightarrow$ $W = K_f$ (Vitesse initiale nulle : $v = 0 \Rightarrow K_i = 0$)

$\Rightarrow$ $\boxed{W = K}$ ($K = K_f$)

Voici l'intégrale à résoudre après avoir introduit l'expression du travail dans l'égalité $W = K_f$. Les bornes de l'intégrale sont définies entre 0 et v_x :

$$K = \int_{v_x=0}^{v_x} \frac{m v_x}{\left(1 - v_x^{\ 2}/c^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}v_x$$

(Borne intégrale : $v_x = 0 \to v_x$)

Pour résoudre l'intégrale, posons le changement de variable suivant :

$$u = 1 - v_x^{\ 2}/c^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}u = -\frac{2v_x}{c^2}\mathrm{d}v_x \quad \Rightarrow \quad -\frac{c^2\mathrm{d}u}{2} = v_x \mathrm{d}v_x$$

Évaluons la primitive de l'intégrale sans se soucier des bornes d'intégrations :

$$K = \int \frac{m v_x}{\left(1 - v_x^{\ 2}/c^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}v_x \quad \Rightarrow \quad K = \int \frac{m\left(-c^2\mathrm{d}u/2\right)}{u^{3/2}} \quad \text{(Remplacer } v_x \to u\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad K = -\frac{mc^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}} \quad \text{(Sortir les constantes de l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad K = -\frac{mc^2}{2}\int u^{-3/2}\mathrm{d}u \quad \text{(Réécriture)}$$

$$\Rightarrow \quad K = -\frac{mc^2}{2}\left[\frac{u^{-1/2}}{-1/2}\right] \quad \text{(Appliquer } \int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K = mc^2\left[\frac{1}{u^{1/2}}\right]} \quad \text{(Simplification)}$$

Effectuons notre changement de variable inverse ($u \to v_x$) et évaluons les bornes de la solution de l'intégrale :

$$K = \int_{v_x=0}^{v_x} \frac{m v_x}{\left(1 - v_x^{\ 2}/c^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}v_x \quad \Rightarrow \quad K = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1 - v_x^{\ 2}/c^2}}\right]_0^{v_x} \quad \text{(Résoudre l'intégrale et remplacer } u\text{)}$$

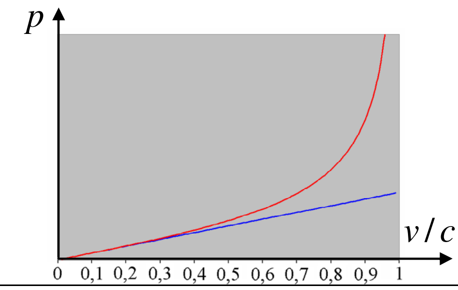
$$\Rightarrow \quad K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_x^{\ 2}/c^2}} - 1\right) \quad \text{(Évaluer les bornes)}$$

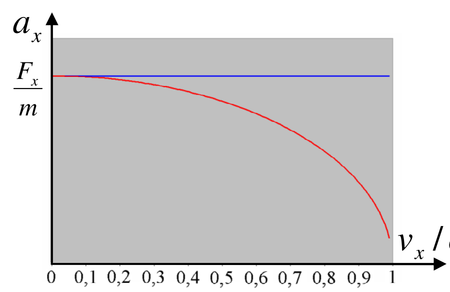
$$\Rightarrow \quad K = \left(\gamma_x - 1\right)mc^2 \quad \blacksquare \quad \text{(Remplacer } \gamma_x = 1/\sqrt{1 - v_x^{\ 2}/c^2}\text{)}$$

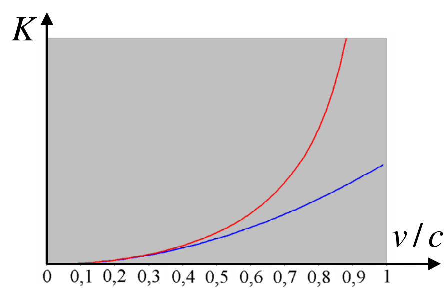
Classique vs relativiste

La mécanique classique (Newtonienne) représente une approximation à basse vitesse de la mécanique relativiste. Elle est valide seulement lorsque la vitesse de l'objet par rapport au référentiel de mesure est beaucoup inférieure à la vitesse de la lumière ($v << c$).

Analysons graphiquement à quelle vitesse l'équation classique diverge de la solution relativiste :

Quantité de mouvement	
Équation classique : (**bleu**) $p = mv$ Équation relativiste : (**rouge**) $p = \gamma m v$	

2[ième] loi de newton classique, force parallèle au mouvement selon l'axe *x*	
Équation classique : (**bleu**) $F_x = m a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = F_x / m$ Équation relativiste : (**rouge**) $F_x = \gamma_x^{\;3} m a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = F_x / \gamma_x^{\;3} m$	

Énergie cinétique	
Équation classique : (**bleu**) $K = \frac{1}{2} m v^2$ Équation relativiste : (**rouge**) $K = (\gamma - 1) m c^2$	

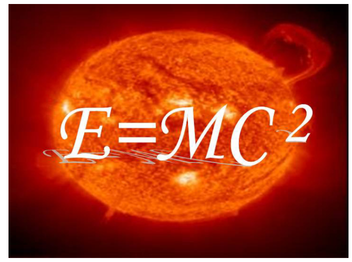
Vérifions que l'expression classique de l'énergie cinétique K peut s'obtenir à partir de l'expression relativiste et de l'approximation des petites vitesse : ($v << c$)

$$K = (\gamma - 1) mc^2 \quad \Rightarrow \quad K = \gamma m c^2 - m c^2 \qquad \text{(Distribuer } mc^2 \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad K \approx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) m c^2 - m c^2 \qquad \left(\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 ,\; v / c << 1 \right)$$

$$\Rightarrow \quad K \approx \frac{1}{2} m v^2 \quad \blacksquare \qquad \text{(Simplification)}$$

L'hypothèse d'Albert Einstein



En analysant l'expression de l'énergie cinétique relativiste $K = (\gamma - 1)mc^2$, on réalise que cette expression peut être décomposée en deux termes : terme dépendant de la vitesse et terme indépendant de la vitesse. Albert Einstein émit l'hypothèse que l'expression indépendante de la vitesse menait à la découverte d'une nouvelle forme d'énergie jamais considérée auparavant : énergie de masse.

Bien qu'à première vue, cette énergie n'est que le résultat mathématique d'une constante d'intégration, elle fut observée lors d'expérience sur la force nucléaire plusieurs années plus tard.

Voici un calcul qui peut mener Albert Einstein au terme d'énergie de masse E_0 :

$K = (\gamma - 1)mc^2 \quad \Rightarrow \quad K = \gamma mc^2 - mc^2$ (Distribuer mc^2)

$\Rightarrow \quad \gamma mc^2 = K + mc^2$ (Isoler γmc^2)

$\Rightarrow \quad E = K + E_0 \quad \blacksquare$ (Remplacer $E = \gamma mc^2$, $E_0 = mc^2$)

L'énergie au repos

À partir de l'hypothèse d'Albert Einstein, on peut définir l'énergie de masse au repos E_0 d'un corps grâce à l'expression suivante :

$$E_0 = mc^2$$

où E_0 : Énergie de masse d'un objet au repos (J)

m : Masse de l'objet au repos (kg)

c : Vitesse de la lumière ($c = 3 \times 10^8$ m/s)

L'énergie totale relativiste

En relativité, nous pouvons définir l'énergie totale E associée à un corps en mouvement grâce à l'expression suivante. Cette énergie regroupe l'énergie cinétique K et énergie de masse E_0 :

$$E = \gamma mc^2$$

où E : Énergie totale d'un objet en mouvement (J) ($E = K + E_0$)

γ : Facteur gamma avec vitesse ordinaire de l'objet ($\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$)

m : Masse de l'objet au repos (kg)

c : Vitesse de la lumière ($c = 3 \times 10^8$ m/s)

L'énergie totale et la quantité de mouvement

À partir de l'énergie totale E associée à un corps, nous pouvons établir une relation entre cette énergie et la quantité de mouvement :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

où E : L'énergie totale d'un objet (masse et cinétique) (J)

p : Quantité de mouvement relativiste ($\text{kg}\cdot\text{m/s}$) ($p = \gamma mv$)

m : Masse de l'objet au repos (kg)

c : Vitesse de la lumière ($c = 3\times10^8\ \text{m/s}$)

<u>Preuve :</u>

Développons l'expression de l'énergie totale E d'un objet se déplaçant selon l'axe x afin d'inclure la notion de quantité de mouvement :

$E = \gamma mc^2 \quad \Rightarrow \quad E^2 = \gamma^2 m^2c^4$ (Mettre les équations aux carrés)

$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4 \dfrac{1}{1 - v^2/c^2}$ (Remplacer $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$)

$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4\left(\dfrac{c^2}{c^2 - v^2}\right)$ (Multiplier par c^2/c^2 dans la parenthèse)

$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4\left(\dfrac{c^2 + v^2 - v^2}{c^2 - v^2}\right)$ (Ajouter zéro sous la forme $v^2 - v^2$)

$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4\left(\dfrac{v^2}{c^2 - v^2} + \dfrac{c^2 - v^2}{c^2 - v^2}\right)$ (Réécriture)

$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4\left(\dfrac{v^2}{c^2 - v^2} + 1\right)$ (Simplification)

$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^2\left(\dfrac{c^2v^2}{c^2 - v^2} + c^2\right)$ (Distribuer c^2)

$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^2\left(\gamma^2v^2 + c^2\right)$ (Remplacer $\gamma^2 = \dfrac{c^2}{c^2 - v^2}$)

$\Rightarrow \quad E^2 = \gamma^2m^2v^2c^2 + m^2c^4$ (Distribuer m^2c^2)

$\Rightarrow \quad E^2 = (\gamma mv)^2c^2 + m^2c^4$ (Réécriture)

$\Rightarrow \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad \blacksquare$ (Remplacer $p = \gamma mv$)

Situation A : ***La guerre des étoiles mortes, partie 2.*** Reprenons la situation ***La guerre des étoiles mortes, partie 1*** et évaluons **(a)** la masse et **(b)** la vitesse du système formé par l'union des deux trous noirs **A** et **B** après la collision. Pour simplifier l'analyse, nous ne considérerons par la perte d'énergie gravitationnelle associée au rapprochement des deux trous noirs.

Voici un rappel des résultats obtenus dans la situation précédente :

	Corps	Masse m	Vitesse v_x	Quantité mouvement p_x
Avant	Trou A	$60\times10^{30}\ \text{kg}$	$0{,}3c$	$5{,}661\times10^{39}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$
	Trou B	$40\times10^{30}\ \text{kg}$	$-0{,}5c$	$-6{,}929\times10^{39}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$
Après	Système trou A et B	?	?	$-1{,}268\times10^{39}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$

Évaluons l'énergie totale des trous noirs **A** et **B** avant la collision :

$$E=\gamma mc^2 \quad\Rightarrow\quad E=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}mc^2$$

- $$E_\text{A}=\frac{1}{\sqrt{1-{v_{x\text{A}}}^2/c^2}}m_\text{A}c^2 \quad\Rightarrow\quad E_\text{A}=\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}3c)^2/c^2}}\left(60\times10^{30}\right)c^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{E_\text{A}=5{,}661\times10^{48}\ \text{J}}$$
- $$E_\text{B}=\frac{1}{\sqrt{1-{v_{x\text{B}}}^2/c^2}}m_\text{B}c^2 \quad\Rightarrow\quad E_\text{A}=\frac{1}{\sqrt{1-(-0{,}5c)^2/c^2}}\left(40\times10^{30}\right)c^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{E_\text{B}=4{,}157\times10^{48}\ \text{J}}$$

Appliquons la conservation de l'énergie à l'union de nos deux trous noirs sans perte d'énergie même si la collision est parfaitement inélastique. Pour simplifier notre calcul, nous allons considérer qu'il n'y a pas de variations d'énergie gravitationnelle ($\Delta U_\text{g}=0$) :

$$E_f=E_i+W \quad\Rightarrow\quad E_\text{A+B}=E_\text{A}+E_\text{B} \qquad (\Delta U_\text{g}=0 \text{ et } W=0)$$

$$\Rightarrow\quad E_\text{A+B}=\left(5{,}661\times10^{48}\right)+\left(4{,}157\times10^{48}\right) \qquad \text{(Remplacer)}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{E_\text{A+B}=9{,}818\times10^{48}\ \text{J}} \qquad (\text{Évaluer } E_\text{A+B})$$

Évaluons la masse de l'union de nos deux trous noirs :

$$E^2=p^2c^2+m^2c^4 \quad\Rightarrow\quad m=\sqrt{\frac{E^2-p^2c^2}{c^4}} \qquad (\text{Isoler } m)$$

$$\Rightarrow\quad m_\text{A+B}=\sqrt{\frac{\left(9{,}818\times10^{48}\right)^2-\left(-1{,}268\times10^{39}\right)^2c^2}{c^4}} \qquad \text{(Remplacer)}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{m_\text{A+B}=109\times10^{30}\ \text{kg}} \qquad \textbf{(a)} \qquad (\text{Évaluer } m_\text{A+B})$$

On réalise que la perte d'énergie cinétique du système se matérialise en énergie interne au trou noir qui s'apprécie à l'extérieur du trou noir comme une augmentation de la masse.

Évaluons la vitesse de l'union des deux trous noirs en utilisant la quantité de mouvement et la masse trouvée :

$$p_x = \gamma_x m v_x$$ (Quantité de mouvement relativiste)

$$\Rightarrow \quad p_x = \frac{m v_x}{\sqrt{1 - v_x^{\,2} / c^2}}$$ (Remplacer $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2 / c^2}$)

$$\Rightarrow \quad p_x^{\,2} = \frac{m^2 v_x^{\,2}}{1 - v_x^{\,2} / c^2}$$ (Mettre au carré)

$$\Rightarrow \quad p_x^{\,2}\left(1 - v_x^{\,2} / c^2\right) = m^2 v_x^{\,2}$$ (Retirer le dénominateur)

$$\Rightarrow \quad p_x^{\,2} - \frac{p_x^{\,2} v_x^{\,2}}{c^2} = m^2 v_x^{\,2}$$ (Distribuer $p_x^{\,2}$)

$$\Rightarrow \quad p_x^{\,2} = m^2 v_x^{\,2} + \frac{p_x^{\,2} v_x^{\,2}}{c^2}$$ (Regrouper terme en $v_x^{\,2}$)

$$\Rightarrow \quad p_x^{\,2} = v_x^{\,2}\left(m^2 + \frac{p_x^{\,2}}{c^2}\right)$$ (Factoriser $v_x^{\,2}$)

$$\Rightarrow \quad p_x^{\,2} = v_x^{\,2}\left(\frac{p_x^{\,2} + m^2 c^2}{c^2}\right)$$ (Dénominateur commun)

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = \pm\sqrt{\frac{p_x^{\,2} c^2}{p_x^{\,2} + m^2 c^2}}}$$ (Isoler v_x)

$$\Rightarrow \quad v_{x\mathrm{A+B}} = \pm\sqrt{\frac{\left(-1{,}268\times 10^{39}\right)^2 c^2}{\left(-1{,}268\times 10^{39}\right)^2 + \left(109\times 10^{30}\right)^2 c^2}}$$ (Remplacer valeurs numériques)

$$\Rightarrow \quad v_{x\mathrm{A+B}} = -1{,}1624\times 10^{7}\ \mathrm{m/s}$$ (Calcul)

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x\mathrm{A+B}} = -0{,}0387\, c} \quad \textbf{(b)}$$ (Évaluer $v_{x\mathrm{A+B}}$)

Si l'on appliquait les lois de la mécanique classique ($p_x = mv$) à cette collision parfaitement inélastique, le résultat sera égal à

$$v_{x\mathrm{A+B}} = -0{,}02\, c\ .$$

(avec calcul classique)