Chapitre 4.7 – L'effet Doppler lumineux

Effet Doppler lumineux longitudinal

Lorsqu'un émetteur **A** se déplace avec une vitesse relative v par rapport à un récepteur **B**, la fréquence de la lumière mesurée par le récepteur **B** est modifiée par un effet relativiste portant le nom d'effet Doppler lumineux :

Effet Doppler en expression de v	Effet Doppler en expression de $\beta = v/c$
$f_{\mathrm{B}} = \dfrac{\sqrt{c \pm v}}{\sqrt{c \mp v}}\, f_{\mathrm{A}}$	$f_{\mathrm{B}} = \sqrt{\dfrac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}\, f_{\mathrm{A}}$

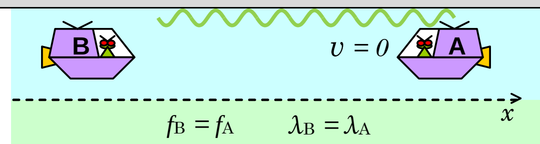
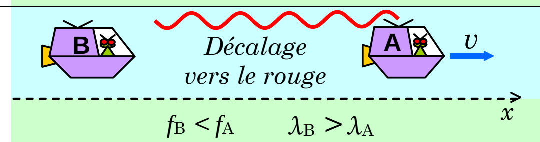
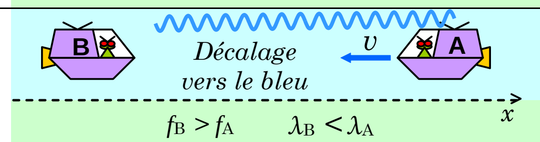
où f_{A} : Fréquence de la lumière émise par le référentiel A (Hz).

f_{B} : Fréquence de la lumière reçue par le référentiel B (Hz).

c : Vitesse de la lumière ($c = 3\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$).

v : Vitesse relative du référentiel A par rapport au référentiel B (m/s).

β : Rapport entre la vitesse relative émetteur-récepteur et la vitesse de la lumière ($\beta = v/c$)

Situation	Équation	Selon le référentiel **B**
Vitesse relative nulle entre l'émetteur **A** et le récepteur **B** (fréquence inchangée)	$f_{\mathrm{B}} = f_{\mathrm{A}}$	
Émetteur A **s'éloigne** du récepteur B (fréquence diminue)	$f_{\mathrm{B}} = \dfrac{\sqrt{c-v}}{\sqrt{c+v}}\, f_{\mathrm{A}}$	
Émetteur A **s'approche** du récepteur B (fréquence augmente)	$f_{\mathrm{B}} = \dfrac{\sqrt{c+v}}{\sqrt{c-v}}\, f_{\mathrm{A}}$	

Preuve :

L'effet Doppler lumineux longitudinal représente une reformulation de la transformation de Lorentz du temps. Dans le référentiel de l'émetteur A, la lumière voyage à vitesse c et une longueur d'onde λ_{A} prend une période T_{A} avant d'être complètement formée dans l'espace (selon l'émetteur **A**). La fréquence de la lumière est alors $f_{\mathrm{A}} = 1/T_{\mathrm{A}}$.

Selon un référentiel **B** tel que le référentiel **A** se déplace à une vitesse relative $v_{x\mathrm{AB}}$ par rapport au référentiel **B**, une longueur d'onde λ_{B} sera complètement captée après une période T_{B}. Des effets relativistes impliqueront que $\lambda_A \neq \lambda_B$ et $T_A \neq T_B$, mais que la vitesse de la lumière $c = \lambda_A / T_A = \lambda_B / T_B$ reste la même selon le référentiel **A** et **B**.

Appliquons la transformation de Lorentz du temps du référentiel **A** vers **B** à l'aide de λ_A et T_A afin d'évaluer $f_B = 1/T_B$ où **A** s'éloigne de **B** avec une vitesse relative v_{xAB} :

$$\Delta t_B = \gamma\left(\Delta t_A + \frac{v_{xAB}\,\Delta x_A}{c^2}\right) \qquad \text{(Transformation de Lorentz de du temps)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \gamma\left(T_A + \frac{v_{xAB}\lambda_A}{c^2}\right) \qquad \text{(Remplacer } \Delta t = T \text{ et } \Delta x = \lambda\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \gamma\left(T_A + T_A\frac{v_{xAB}}{c}\right) \qquad \text{(Longueur d'onde : } \lambda_A = cT_A\text{, alors } T_A = \frac{\lambda_A}{c}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \gamma T_A\left(1 + \frac{v_{xAB}}{c}\right) \qquad \text{(Factoriser } T_A\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \gamma T_A\left(\frac{c + v_{xAB}}{c}\right) \qquad \text{(Déminateur commun)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \frac{1}{\sqrt{1 - {v_{xAB}}^2/c^2}}\,T_A\left(\frac{c + v_{xAB}}{c}\right) \qquad \text{(Remplacer } \gamma = \sqrt{1 - {v_{xAB}}^2/c^2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2 - {v_{xAB}}^2}{c^2}}}\,T_A\left(\frac{c + v_{xAB}}{c}\right) \qquad \text{(Déminateur commun)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \frac{1}{\frac{1}{c}\sqrt{c^2 - {v_{xAB}}^2}}\,T_A\left(\frac{c + v_{xAB}}{c}\right) \qquad \text{(Factoriser } 1/c^2 \text{ et le sortir de la racine)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \frac{c}{\sqrt{c^2 - {v_{xAB}}^2}}\,T_A\left(\frac{c + v_{xAB}}{c}\right) \qquad \text{(Inverser la fraction 1 / } c\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \frac{c + v_{xAB}}{\sqrt{(c + v_{xAB})(c - v_{xAB})}}\,T_A \qquad \text{(Simplifier } c \text{ et reformuler le dénominateur)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \frac{c + v_{xAB}}{\sqrt{(c - v_{xAB})}\ \sqrt{(c + v_{xAB})}}\,T_A \qquad \text{(Séparer le produit dans la racine)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \frac{\sqrt{c + v_{xAB}}}{\sqrt{c - v_{xAB}}}\,T_A \qquad \text{(Simplifier } \sqrt{c + v_{xAB}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad f_B = \frac{\sqrt{c - v_{xAB}}}{\sqrt{c + v_{xAB}}}\,f_A \qquad \text{(Inverser les relations et remplacer } f = 1/T\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_B = \frac{\sqrt{c \mp v}}{\sqrt{c \pm v}}\,f_A} \quad \blacksquare \qquad \text{(Remplacer } v = |v_{xAB}|\text{)}$$

Situation 1 : ***Le décalage vers le rouge cosmologique.*** Dans une galaxie typique, les nébuleuses émettent une fraction significative de leur lumière à la longueur d'onde de la raie Hα, 656,3 nm (un photon de cette longueur d'onde est émis lorsqu'un électron passe du 3e au 2e niveau d'énergie dans un atome d'hydrogène). En raison de l'expansion de l'Univers, une galaxie lointaine s'éloigne de nous à 0,3 c. On désire déterminer la longueur d'onde de la lumière Hα que l'on reçoit en provenance de cette galaxie.

Évaluons la fréquence du photon associée à une longueur d'onde de 656,3 nm émise au repos :

$$\lambda = vT \quad \Rightarrow \quad \lambda = (c)\left(\frac{1}{f}\right) \qquad \text{(Remplacer } v = c \text{ et } T = \frac{1}{f}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{c}{\lambda} \qquad \text{(Isoler } f\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{(3\times 10^{8})}{(656{,}3\times 10^{-9})} \qquad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f = 4{,}57\times 10^{14}\ \text{Hz}} \qquad \text{(Évaluer } f\text{)}$$

À partir de l'expression de l'effet Doppler de la lumière, évaluons la fréquence de la lumière mesurée sur la Terre sachant que l'émetteur s'éloigne avec une vitesse relative égale à 0,3 c :

$$f_{\text{B}} = \frac{\sqrt{c\pm v}}{\sqrt{c\mp v}} f_{\text{A}} \quad \Rightarrow \quad f_{\text{B}} = \frac{\sqrt{c-v}}{\sqrt{c+v}} f_{\text{A}} \qquad \text{(Éloignement, diminution de } f\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad f_{\text{B}} = \frac{\sqrt{c-(0{,}3c)}}{\sqrt{c+(0{,}3c)}} f_{\text{A}} \qquad \text{(Remplacer } v\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad f_{\text{B}} = \frac{\sqrt{0{,}7}}{\sqrt{1{,}3}} f_{\text{A}} \qquad \text{(Calcul et simplification de } c\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad f_{\text{B}} = \frac{\sqrt{0{,}7}}{\sqrt{1{,}3}} (4{,}57\times 10^{14}) \qquad \text{(Remplacer } f_{\text{A}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_{\text{B}} = 3{,}35\times 10^{14}\ \text{Hz}} \qquad \text{(Évaluer } f_{\text{B}}\text{)}$$

Nous pouvons maintenant évaluer la longueur d'onde mesurée sur la Terre :

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(3\times 10^{8})}{(3{,}35\times 10^{14})} \qquad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 895{,}5\ \text{nm}}$$

Situation 2 : *Un feu rouge brûlé.* Au volant de sa voiture, Malcolm brûle un feu rouge et se fait arrêter par un policier. Il raconte au policier qu'en raison du décalage Doppler vers le bleu, il a cru que la lumière rouge était verte! On désire déterminer si le policier devrait croire son histoire : on peut supposer que la longueur d'onde du rouge correspond à 670 nm et que celle du vert correspond à 550 nm.

Évaluons la fréquence associée à la lumière rouge et à la lumière verte :

$\lambda = vT \quad \Rightarrow \quad \lambda = (c)\left(\frac{1}{f}\right)$ (Remplacer $v = c$ et $T = \frac{1}{f}$)

$\Rightarrow \quad f = \frac{c}{\lambda}$ (Isoler f)

Lumière rouge : $f_{\text{rouge}} = \frac{(3\times10^{8})}{(670\times10^{-9})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{\text{rouge}} = 4{,}478\times10^{14}\ \text{Hz}}$

Lumière verte : $f_{\text{vert}} = \frac{(3\times10^{8})}{(550\times10^{-9})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{\text{vert}} = 5{,}455\times10^{14}\ \text{Hz}}$

À partir de l'expression de l'effet Doppler de la lumière, évaluons la vitesse relative v entre le feu de signalisation qui émet la couleur rouge et Malcolm qui observe la couleur verte. Puisque Malcolm est accusé d'avoir brûlé le feu rouge, il se déplaçait vers le feu de signalisation :

$f_{\text{B}} = \frac{\sqrt{c \pm v}}{\sqrt{c \mp v}} f_{\text{A}} \quad \Rightarrow \quad f_{\text{B}} = \frac{\sqrt{c+v}}{\sqrt{c-v}} f_{\text{A}}$ (Approchement, augmentation de f)

$\Rightarrow \quad f_{\text{vert}} = \frac{\sqrt{c+v}}{\sqrt{c-v}} f_{\text{rouge}}$ (Remplacer f_{A} et f_{B})

$\Rightarrow \quad \frac{f_{\text{vert}}}{f_{\text{rouge}}} = \frac{\sqrt{c+v}}{\sqrt{c-v}}$ (Isoler terme de fréquence)

$\Rightarrow \quad \left(\frac{f_{\text{vert}}}{f_{\text{rouge}}}\right)^2 = \frac{c+v}{c-v}$ (Mettre au carré)

$\Rightarrow \quad (c-v) f_{\text{vert}}{}^2 = (c+v) f_{\text{rouge}}{}^2$ (Retirer les dénominateurs)

Nous pouvons effectuer la distributivité du terme $c-v$ et $c+v$ et isoler la vitesse relative *v* :

$$(c-v)f_{\text{vert}}^{\ 2} = (c+v)f_{\text{rouge}}^{\ 2}$$

$\Rightarrow \quad cf_{\text{vert}}^{\ 2} - vf_{\text{vert}}^{\ 2} = cf_{\text{rouge}}^{\ 2} + vf_{\text{rouge}}^{\ 2}$ (Distributivité)

$\Rightarrow \quad cf_{\text{vert}}^{\ 2} - cf_{\text{rouge}}^{\ 2} = vf_{\text{vert}}^{\ 2} + vf_{\text{rouge}}^{\ 2}$ (Mettre terme en *v* ensemble)

$\Rightarrow \quad c\left(f_{\text{vert}}^{\ 2} - f_{\text{rouge}}^{\ 2}\right) = v\left(f_{\text{rouge}}^{\ 2} + f_{\text{vert}}^{\ 2}\right)$ (Factoriser *c* et *v*)

$\Rightarrow \quad v = c\dfrac{\left(f_{\text{vert}}^{\ 2} - f_{\text{rouge}}^{\ 2}\right)}{\left(f_{\text{rouge}}^{\ 2} + f_{\text{vert}}^{\ 2}\right)}$ (Isoler *v*)

$\Rightarrow \quad v = c\dfrac{\left(\left(5{,}455\times10^{14}\right)^2 - \left(4{,}478\times10^{14}\right)^2\right)}{\left(\left(4{,}478\times10^{14}\right)^2 + \left(5{,}455\times10^{14}\right)^2\right)}$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad v = 0{,}195c$ (Évaluer la vitesse relative *v*)

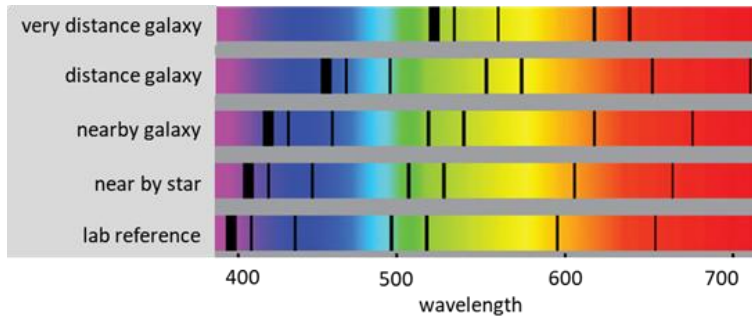
$\Rightarrow \quad \boxed{v = 5{,}84\times10^{7}\ \text{m/s}}$ (Remplacer $c = 3\times10^{8}\ \text{m/s}$)

Le policier ne doit pas croire à l'histoire de Malcolm, car cette vitesse est impossible à atteindre avec une voiture.

L'effet Doppler lumineux à basse vitesse

Lorsque l'on observe des étoiles dans notre galaxie, celle-ci se déplace à de basse vitesse comparativement à la vitesse de la lumière.

Pour analyser des spectres d'absorption de la lumière, il est préférable d'utiliser une expression approximative de l'effet Doppler lumineux pour faire une meilleure gestion de la précision numérique des calculs qui en découle.



https://d-arora.github.io/VisualPhysics/mod72/mod72_DopplerLight.htm
Spectre d'absorption de la lumière (lignes noires correspondant à des longueurs d'onde absorbées) pour différentes structures célestes en éloignement (effet de décalage vers le rouge) par rapport à l'observateur sur Terre.

À basse vitesse ($v << c$, $\beta << 1$), nous pouvons approximer par un développement en série de Taylor l'effet Doppler lumineux longitudinale par l'équation suivante :

Expression en fréquence	Expression en longueur d'onde ($\lambda = c / f$)
$f_B = f_A (1 \pm \beta)$	$\lambda_B = \dfrac{\lambda_A}{1 \pm \beta}$ ou bien $\lambda_A = \lambda_B (1 \pm \beta)$

où f_A : Fréquence de la lumière émise par le référentiel A (Hz).

f_B : Fréquence de la lumière reçue par le référentiel B (Hz).

c : Vitesse de la lumière ($c = 3 \times 10^8$ m/s).

v : Vitesse relative du référentiel A par rapport au référentiel B (m/s).

λ_A : La longueur d'onde de la lumière émise par le référentiel A (m) ($\lambda_A = c / f_A$).

λ_B : La longueur d'onde de la lumière reçue par le référentiel B (m) ($\lambda_B = c / f_B$).

β : Rapport entre la vitesse relative émetteur-récepteur et la vitesse de la lumière ($\beta = v / c << 1$).

Preuve :

Afin d'approximer l'effet Doppler lumineux à basse vitesse, appliquons un développement en série de Taylor

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots$$

à notre fonction

$$f_B = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} f_A$$

où $\beta = x$ ce qui nous donnera pour un développement à deux termes l'expression suivante :

$$f_B \approx f_B\big|_{\beta=0} + \frac{f_B'\big|_{\beta=0}}{1!} \beta$$

Évaluons nos deux termes du développement :

$f_B\big|_{\beta=0}$:

$$f_B\big|_{\beta=0} = \sqrt{\frac{1\pm(0)}{1\mp(0)}}\, f_A$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_B\big|_{\beta=0} = f_A}$$

$$f_B' = \frac{d}{d\beta}\left(\sqrt{\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}}\, f_A\right) \Rightarrow \quad f_B' = f_A \frac{d}{d\beta}\left(\sqrt{\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f_B' = f_A \frac{1}{2}\left(\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}\right)^{-1/2} \frac{d}{d\beta}\left(\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f_B' = f_A \frac{1}{2}\left(\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}\right)^{-1/2} \left[\frac{(1\mp\beta)\frac{d}{d\beta}(1\pm\beta) - (1\pm\beta)\frac{d}{d\beta}(1\mp\beta)}{(1\mp\beta)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad f_B' = f_A \frac{1}{2}\left(\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}\right)^{-1/2} \left[\frac{(1\mp\beta)(\pm1) - (1\pm\beta)(\mp1)}{(1\mp\beta)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad f_B' = \pm f_A \frac{1}{2}\left(\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}\right)^{-1/2} \left[\frac{(1\mp\beta) + (1\pm\beta)}{(1\mp\beta)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad f_B' = \pm f_A \frac{1}{2}\left(\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}\right)^{-1/2} \left[\frac{2}{(1\mp\beta)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_B' = \pm f_A \left(\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}\right)^{-1/2} (1\mp\beta)^{-2}}$$

$f_B'\big|_{\beta=0}$:

$$f_B'\big|_{\beta=0} = \pm f_A \left(\frac{1\pm(0)}{1\mp(0)}\right)^{-1/2} \left(1\mp(0)\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_B'\big|_{\beta=0} = \pm f_A}$$

En remplaçant nos termes dans l'expression

$$f_B \approx f_B\big|_{\beta=0} + \frac{f_B'\big|_{\beta=0}}{1!}\beta \quad ,$$

nous obtenons

$$f_B \approx f_A + (\pm f_A)\beta$$

que nous reformulons sous la forme

$$f_B \approx f_A(1\pm\beta) \quad . \ \blacksquare$$