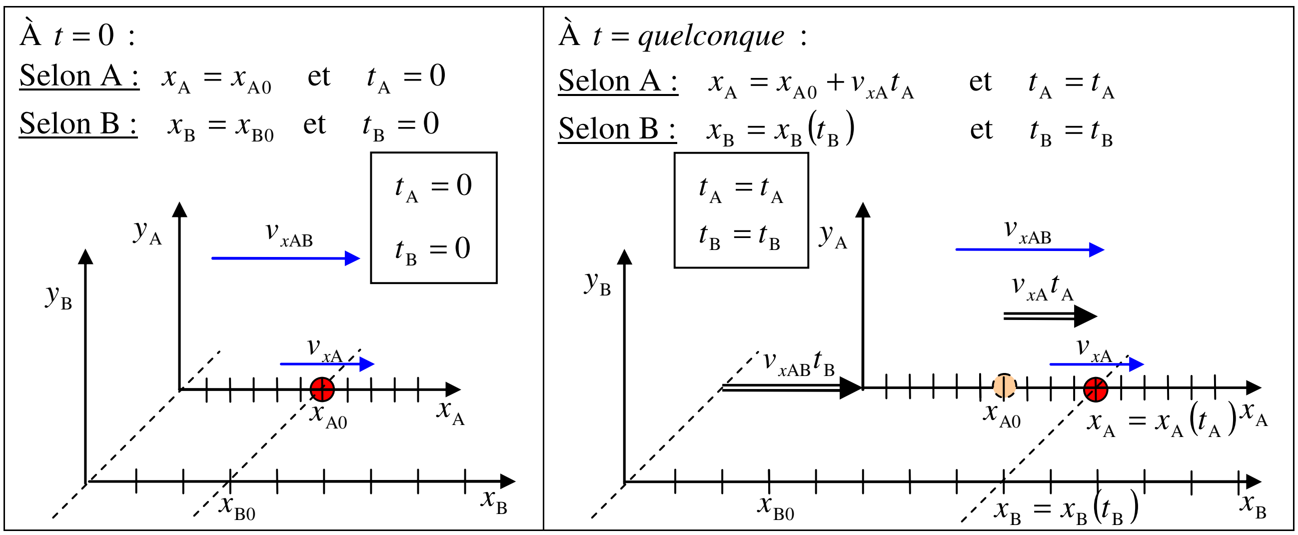
Chapitre 4.5 – Les transformations de Lorentz

Transformation de Lorentz

La **transformation** de **Lorentz** permet de **convertir** des **mesures** (x, y, t) **d'un référentiel inertiel A** vers un **référentiel inertiel B** qui ont les caractéristiques suivantes :

1) Le référentiel **A** se déplace à une vitesse relative $v_{x\mathrm{AB}}$ par rapport au référentiel **B**.
2) L'origine du référentiel **A** coïncide avec l'origine du référentiel **B** à $t_\mathrm{A} = t_\mathrm{B} = 0$.
3) La vitesse relative $v_{x\mathrm{AB}}$ du référentiel **A** par rapport au référentiel **B** est une fraction non négligeable de la vitesse de la lumière c.

Voici une représentation graphique de la transformation :



À partir de la transformation de Lorentz basée sur les résultats précédents, nous pouvons transformer les positions x_A et y_A et le temps t_A mesurés dans le référentiel A vers le référentiel B à partir des trois transformations suivantes :

	Transformation A vers B	Transformation B vers A
Position *x*	$x_\mathrm{B} = \gamma_\mathrm{AB}\left(x_\mathrm{A} + v_{x\mathrm{AB}} t_\mathrm{A}\right)$	$x_\mathrm{A} = \gamma_\mathrm{AB}\left(x_\mathrm{B} - v_{x\mathrm{AB}} t_\mathrm{B}\right)$
Position *y*	$y_\mathrm{B} = y_\mathrm{A}$	$y_\mathrm{A} = y_\mathrm{B}$
Temps *t*	$t_\mathrm{B} = \gamma_\mathrm{AB}\left(t_\mathrm{A} + \dfrac{x_\mathrm{A} v_{x\mathrm{AB}}}{c^2}\right)$	$t_\mathrm{A} = \gamma_\mathrm{AB}\left(t_\mathrm{B} - \dfrac{x_\mathrm{B} v_{x\mathrm{AB}}}{c^2}\right)$

où x_A : Position horizontale d'un événement selon le référentiel A (m)

x_B : Position horizontale d'un événement selon le référentiel B (m)

y_A : Position verticale d'un événement selon le référentiel A (m)

y_B : Position verticale d'un événement selon le référentiel B (m)

t_A : Moment (temps) d'un événement selon le référentiel A (s)

t_B : Moment (temps) d'un événement selon le référentiel B (s)

v_{xAB} : Vitesse relative du référentiel A par rapport au référentiel B (m/s)

γ_{AB} : Facteur de Lorentz ($\gamma_{AB} = 1/\sqrt{1 - v_{xAB}{}^2 / c^2}$, $v^2 = v_{xAB}{}^2 = v_{xBA}{}^2$)

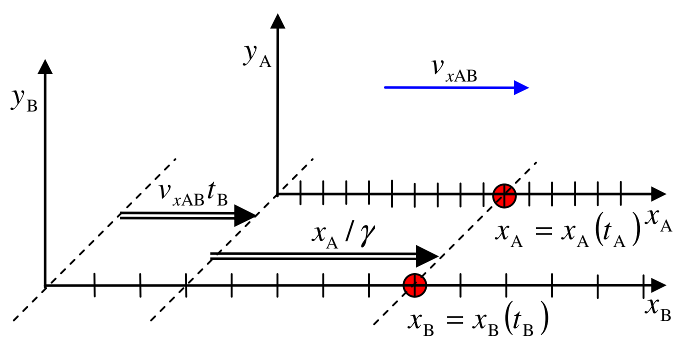
Inversion vitesse relative : $v_{xAB} = -v_{xBA}$ et $\gamma_{AB} = \gamma_{BA}$

P.S. Le **signe** associé de la **vitesse** v_{xAB} est **<u>très important</u>,** car il précise le **sens** de la **vitesse**.

- Référentiel A se déplace dans le **sens positif** de **l'axe *x*** par rapport à B, alors v_{xAB} est **positif**.
- Référentiel A se déplace dans le **sens négatif** de **l'axe *x*** par rapport à B, alors v_{xAB} est **négatif**.

Preuve :

Considérons un référentiel **A** se déplaçant à vitesse v_{xAB} par rapport à un référentiel **B** où les origines coïncident à $t_A = t_B = 0$. Selon le référentiel **B**, l'axe x_A du référentiel **A** est contracté par un facteur gamma γ pour des raisons relativistes puisqu'il est en mouvement par rapport à lui.



Exprimons une position x_B selon le référentiel **B** à l'aide d'une position x_A mesurée selon le référentiel **A** et à l'aide du temps t_B selon le référentiel **B** permettant au référentiel **A** d'effectuer une translation à vitesse v_{xAB} :

$$x_B = v_{xAB} t_B + \frac{x_A}{\gamma}$$

Par principe de relativité, nous pouvons effectuer ces même considération, mais en inversant les référentiels. Ainsi, on peut également affirmer que **A** est immobile et que **B** est en mouvement, car $v_{xAB} = -v_{xBA}$. Ceci nous permet d'écrire la même relation que celle précédente, mais en inversant les indices :

$$x_A = v_{xBA} t_A + \frac{x_B}{\gamma}$$

Manipulons la dernière relation afin d'isoler x_{B} nous permettant ainsi de construire notre transformation de la position :

$$x_{\mathrm{A}} = v_{x\mathrm{BA}} t_{\mathrm{A}} + \frac{x_{\mathrm{B}}}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad x_{\mathrm{B}} = \gamma\left(x_{\mathrm{A}} - v_{x\mathrm{BA}} t_{\mathrm{A}}\right) \qquad \text{(Isoler } x_{\mathrm{B}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_{\mathrm{B}} = \gamma\left(x_{\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{A}}\right)} \ \blacksquare \ (1) \qquad \text{(Remplacer } v_{x\mathrm{BA}} = -v_{x\mathrm{AB}}\text{)}$$

Rappelons la relation suivante :

$$\gamma^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_{x\mathrm{AB}}{}^2 / c^2}}\right)^2 = \frac{1}{1 - v_{x\mathrm{AB}}{}^2 / c^2} = \frac{c^2}{c^2 - v_{x\mathrm{AB}}{}^2}$$

Nous allons maintenant utiliser les deux expressions de la position x_{B} déterminée précédemment :

$$x_{\mathrm{B}} = v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{B}} + \frac{x_{\mathrm{A}}}{\gamma} \qquad \text{et} \qquad x_{\mathrm{B}} = \gamma\left(x_{\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{A}}\right)$$

Égalisons les deux équations de x_{B} et isolons t_{B} nous permettant ainsi de construire notre transformation du temps :

$$v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{B}} + \frac{x_{\mathrm{A}}}{\gamma} = \gamma\left(x_{\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{A}}\right) \qquad \text{(Égalité de } x_{\mathrm{B}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad t_{\mathrm{B}} = \frac{1}{v_{x\mathrm{AB}}}\left[\gamma\left(x_{\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{A}}\right) - \frac{x_{\mathrm{A}}}{\gamma}\right] \qquad \text{(Isoler } t_{\mathrm{B}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad t_{\mathrm{B}} = \frac{\gamma}{v_{x\mathrm{AB}}}\left[x_{\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{A}} - \frac{x_{\mathrm{A}}}{\gamma^2}\right] \qquad \text{(Factoriser } \gamma\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad t_{\mathrm{B}} = \frac{\gamma}{v_{x\mathrm{AB}}}\left[x_{\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{A}} - \frac{x_{\mathrm{A}}\left(c^2 - v_{x\mathrm{AB}}{}^2\right)}{c^2}\right] \qquad \text{(Remplacer } \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v_{x\mathrm{AB}}{}^2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad t_{\mathrm{B}} = \frac{\gamma}{v_{x\mathrm{AB}}}\left[\frac{x_{\mathrm{A}} c^2 + v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{A}} c^2 - x_{\mathrm{A}} c^2 + x_{\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}{}^2}{c^2}\right] \qquad \text{(Distribuer et dénominateur commun)}$$

$$\Rightarrow \quad t_{\mathrm{B}} = \frac{\gamma}{v_{x\mathrm{AB}}}\left[\frac{v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{A}} c^2 + x_{\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}{}^2}{c^2}\right] \qquad \text{(Simplifier terme } x_{\mathrm{A}} c^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_{\mathrm{B}} = \gamma\left(t_{\mathrm{A}} + \frac{x_{\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{c^2}\right)} \ \blacksquare \ (2) \qquad \text{(Simplifier)}$$

Situation A : ***Flash tes lumières*****.** Un vaisseau spatial se déplace vers une station orbitale avec une vitesse relative égale à 0,8 c par rapport à la station orbitale. Pour signaler sa venue à la station orbitale, le pilote du vaisseau émet un éclair lumineux en direction de la station orbitale à tous les 10 ms. On désire évaluer la distance parcourue par le vaisseau spatial entre l'émission de deux éclairs par rapport à la station orbitale.

Nous avons deux référentiels à utiliser dans cette situation :

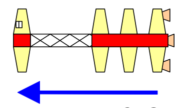
Référentiel **V** : Le vaisseau spatial qui émet les éclairs lumineux.
Référentiel **S** : La station orbitale.

La vitesse relative entre nos deux référentiels est :

$$v_{x\mathrm{VS}} = -0{,}8\,c$$

(Vitesse relative de **V** par rapport à **S**)

Dans le référentiel de la station orbitale



$v_{x\mathrm{VS}} = -0{,}8\,c$

Notre situation comporte deux événements :

E1 : Émission par le vaisseau du 1ier éclair.
E2 : Émission par le vaisseau du 2ième éclair.

Dans le référentiel du vaisseau spatial (**V**), les deux événements sont bien mesurés. Par rapport au vaisseau, les deux émissions ont lieu au même endroit et sont séparés temporellement par 10 ms :

Référentiel V	**Événement 1**	**Événement 2**
Position	$x_{\mathrm{V}(1)} = 0$	$x_{\mathrm{V}(2)} = 0$
Temps	$t_{\mathrm{V}(1)} = 0$	$t_{\mathrm{V}(2)} = 0{,}01\ \mathrm{s}$

Dans le référentiel de la station orbitale (**S**), les deux événements doivent être transformés. Puisque la vitesse relative est exprimée à partir de **V** par rapport à **S** et que les mesures sont connues dans le référentiel **V**, utilisons la transformation **V** vers **S** :

Facteur de Lorentz : $\gamma_{\mathrm{VS}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v_{x\mathrm{VS}}^2 / c^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{VS}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (-0{,}8\,c)^2 / c^2}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\gamma_{\mathrm{VS}} = 1{,}667}$$

Transformation **V** vers **S** : $x_{\mathrm{S}} = \gamma_{\mathrm{VS}}\left(x_{\mathrm{V}} + v_{x\mathrm{VS}} t_{\mathrm{V}}\right)$

Référentiel S	**Événement 1**	**Événement 2**
Position	$x_{\mathrm{S}(1)} = \gamma_{\mathrm{VS}}\left(x_{\mathrm{V}(1)} + v_{x\mathrm{VS}}\, t_{\mathrm{V}(1)}\right)$ $= (1{,}667)\left((0) + (-0{,}8\,c)(0)\right)$ $= 0\ \mathrm{m}$	$x_{\mathrm{S}(2)} = \gamma_{\mathrm{VS}}\left(x_{\mathrm{V}(2)} + v_{x\mathrm{VS}}\, t_{\mathrm{V}(2)}\right)$ $= (1{,}667)\left((0) + (-0{,}8\,c)(0{,}01)\right)$ $= -4 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$

Ainsi, le déplacement du vaisseau entre deux émissions par rapport à la station orbitale sera égal à la valeur suivante :

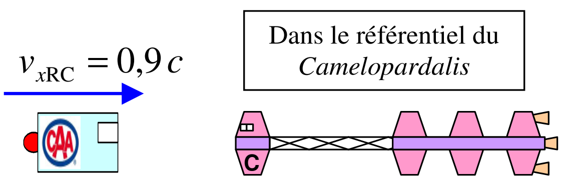
$$D_{\mathrm{S}} = x_{\mathrm{S}(2)} - x_{\mathrm{S}(1)} = -4 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$$

Situation B : *Le Camelopardalis en panne*. Durant un long voyage intersidéral, le *Camelopardalis* (5000 m de longueur propre) rencontre des ennuis techniques et se doit d'être remorqué. Afin de communiquer avec la remorqueuse la plus près, le *Camelopardalis* émet un **éclair rouge** à l'avant du vaisseau et un **éclair vert** à l'arrière de son vaisseau en même temps selon le réféfentiel du *Camelopardalis*. Par chance, un vaisseau remorque se dirige vers l'avant du *Camelopardalis* avec une vitesse relative de 0,9 c par rapport au *Camelopardalis*. On désire évaluer *par rapport au référentiel du vaisseau remorque* **(a)** la distance entre les deux émissions, **(b)** l'intervalle de temps entre les deux lieux d'émissions, **(c)** quel éclair sera vu en premier selon le vaisseau remorque et **(d)** quelle est la longueur du *Camelopardalis* dans le référentiel du vaisseau remorque.

Nous avons deux référentiels à utiliser dans cette situation :

Référentiel **C** : Le *Camelopardalis*
Référentiel **R** : Le vaisseau remorque.

La vitesse relative entre nos deux référentiels est :



$v_{xRC} = 0{,}9\ c$
(Vitesse relative de **R** par rapport à **C**)

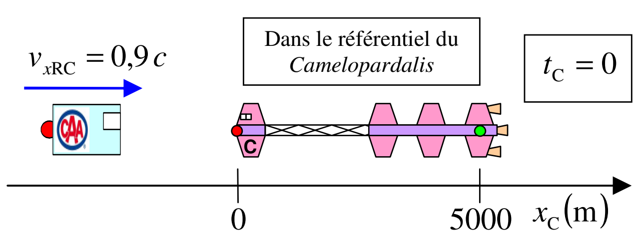
Notre situation comporte deux événements :

E1 : Émission de **l'éclair rouge** à l'avant du vaisseau.
E2 : Émission de **l'éclair vert** à l'arrière du vaisseau.

Dans le référentiel de *Camelopardalis* (**C**), les deux événements sont bien mesurés. Par rapport au vaisseau, les deux émissions ont lieu au même moment et sont séparés spatialement par 5000 m :

Référentiel C	**Événement 1 (rouge)**	**Événement 2 (vert)**
Position	$x_{C(1)} = 0$	$x_{C(2)} = 5000\ \text{m}$
Temps	$t_{C(1)} = 0$	$t_{C(2)} = 0$

<u>Schéma événement 1 et 2 :</u> (événements simultanés) (le vaisseau remorque est contracté)



Dans le référentiel du vaisseau remorque (**R**), les deux événements doivent être transformés. Puisque la vitesse relative est exprimée à partir de **R** par rapport à **C** et que les mesures sont connues dans le référentiel **C**, utilisons la transformation **C** vers **R** en inversant la vitesse relative :

Vitesse relative inverse : $v_{x\mathrm{CR}} = -v_{x\mathrm{RC}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{x\mathrm{CR}} = -0{,}9\,c}$

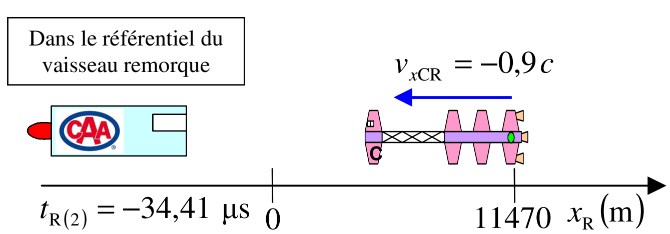
Facteur de Lorentz : $\gamma_{\mathrm{CR}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v_{x\mathrm{CR}}^2 / c^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{\mathrm{CR}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(-0{,}9\,c)^2 / c^2}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\gamma_{\mathrm{CR}} = 2{,}294}$$

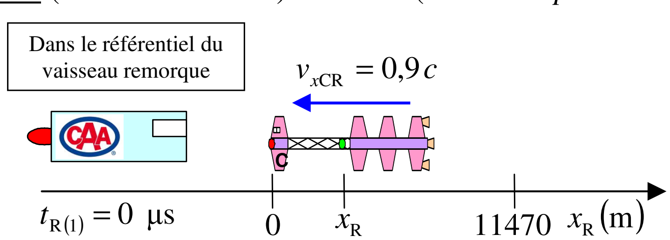
Transformation **C** vers **R** : $x_{\mathrm{R}} = \gamma_{\mathrm{CR}}\left(x_{\mathrm{C}} + v_{\mathrm{CR}} t_{\mathrm{C}}\right)$ et $t_{\mathrm{R}} = \gamma_{\mathrm{CR}}\left(t_{\mathrm{C}} + \dfrac{x_{\mathrm{C}} v_{\mathrm{CR}}}{c^2}\right)$

Référentiel R	**Événement 1 (rouge)**	**Événement 2 (vert)**
Position	$x_{\mathrm{R}(1)} = \gamma_{\mathrm{CR}}\left(x_{\mathrm{C}(1)} + v_{\mathrm{CR}}\, t_{\mathrm{C}(1)}\right)$ $= (2{,}294)\big((0) + (-0{,}9\,c)(0)\big)$ $= 0 \ \mathrm{m}$	$x_{\mathrm{R}(2)} = \gamma_{\mathrm{CR}}\left(x_{\mathrm{C}(2)} + v_{\mathrm{CR}}\, t_{\mathrm{C}(2)}\right)$ $= (2{,}294)\big((5000) + (-0{,}9\,c)(0)\big)$ $= 11470 \ \mathrm{m}$
Temps	$t_{\mathrm{R}(1)} = \gamma_{\mathrm{CR}}\left(t_{\mathrm{C}(1)} + \dfrac{x_{\mathrm{C}(1)} v_{\mathrm{CR}}}{c^2}\right)$ $= (2{,}294)\left((0) + \dfrac{(0)(-0{,}9\,c)}{c^2}\right)$ $= 0 \ \mathrm{s}$	$t_{\mathrm{R}(2)} = \gamma_{\mathrm{CR}}\left(t_{\mathrm{C}(2)} + \dfrac{x_{\mathrm{C}(2)} v_{\mathrm{CR}}}{c^2}\right)$ $= (2{,}294)\left((0) + \dfrac{(5000)(-0{,}9\,c)}{c^2}\right)$ $= -34{,}41 \ \mu\mathrm{s}$

<u>Schéma événement 2 :</u> (1[ier] à se réaliser) (le *Camelopardalis* est contracté)



<u>Schéma événement 1 :</u> (2[ième] à se réaliser) (le *Camelopardalis* est contracté)



<u>Question :</u> Où est rendu **l'éclair vert** à $t_{\mathrm{R}(1)} = 0$ s ? Peut-il avoir dépassé **l'éclair rouge** ?

La distance entre nos deux lieux par rapport au vaisseau remorque est égale à la valeur suivante : (attention, l'événement **E2** se réalise avant l'événement **E1**)

$$D_R = x_{R(1)} - x_{R(2)} \quad \Rightarrow \quad D_R = (0) - (11470) \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_R = -11470 \text{ m}} \qquad \textbf{(a)}$$

L'intervalle de temps entre nos deux événements par rapport au vaisseau remorque est égal à la valeur suivante : (attention, l'événement **E2** se réalise avant l'événement **E1**)

$$T_R = t_{R(1)} - t_{R(2)} \quad \Rightarrow \quad T_R = (0) - \left(-34{,}41\times10^{-6}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_R = 34{,}41 \text{ µs}} \qquad \textbf{(b)}$$

Puisque **l'éclair vert** est émis **avant** **l'éclair rouge**, évaluons la position de **l'éclair vert** à $t_R = 0$ grâce aux équations du MUA et de la vitesse de la lumière :

$$x = x_0 + v_x \Delta t \quad \Rightarrow \quad x = x_{R(2)} + (-c)(T_R)$$

$$\Rightarrow \quad x = (11470) + \left(-3\times10^{8}\right)\left(34{,}41\times10^{-6}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1147 \text{ m}}$$

(c) Puisque le vaisseau remorque est du côté négatif de l'axe et que **l'éclair vert** est derrière **l'éclair rouge** à $t_R = 0$, l'éclair rouge sera vu en premier par le vaisseau remorque.

Évaluons la position arrière du *Camelopardalis* à $t_R = 0$ grâce aux équations du MUA et à la vitesse du vaisseau de 0,9 *c* :

$$x = x_0 + v_x \Delta t \quad \Rightarrow \quad x = x_{R(2)} + (-0{,}9c)(T_R)$$

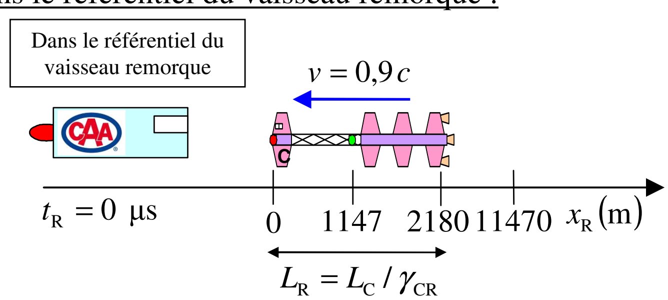
$$\Rightarrow \quad x = (11470) - 0{,}9\left(3\times10^{8}\right) + \left(34{,}41\times10^{-6}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2180 \text{ m}}$$

(d) Puisque cette coordonnée est simultanée avec le devant du vaisseau à $t_R = 0$, elle permet d'évaluer la longueur *Camelopardalis* à $L_R = 2180$ m selon le vaisseau remorque.

Vérifions le tout en calculant la longueur du *Camelopardalis* dans le référentiel du vaisseau remorque par la contraction des longueurs :

$$L_R = \frac{L_C}{\gamma_{CR}} \quad \Rightarrow \quad L_R = \frac{(5000)}{(2{,}294)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_R = 2180 \text{ m}}$$

Schéma à $t_R = 0$ dans le référentiel du vaisseau remorque :



Transformation du déplacement et de l'intervalle de temps

La transformation de Lorentz de base permet la transformation d'un événement $\left(x_{\mathrm{A}}, t_{\mathrm{A}}\right)$ d'un référentiel A vers un référentiel B tel que le référentiel A est en mouvement à vitesse $v_{x\mathrm{AB}}$ par rapport au référentiel B. Lorsqu'une situation nécessite un déplacement Δx_{A} et un intervalle de temps Δt_{A} entre deux événement 1 et 2, nous pouvons effectuer une transformation de Lorentz de Δx_{A} et Δt_{A} vers le référentiel B de la façon suivante :

$$\Delta x_{\mathrm{B}} = \gamma_{\mathrm{AB}}\left(\Delta x_{\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}}\Delta t_{\mathrm{A}}\right)$$

$$\Delta t_{\mathrm{B}} = \gamma_{\mathrm{AB}}\left(\Delta t_{\mathrm{A}} + \frac{\Delta x_{\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{c^2}\right)$$

où Δx_{A} : Variation de position entre l'événement 1 et 2 selon le référentiel A (m)
Δx_{B} : Variation de position entre l'événement 1 et 2 selon le référentiel B (m)
Δt_{A} : Variation de temps entre l'événement 1 et 2 selon le référentiel A (s)
Δt_{B} : Variation de temps entre l'événement 1 et 2 selon le référentiel B (s)
$v_{x\mathrm{AB}}$: Vitesse relative du référentiel A par rapport au référentiel B (m/s)
γ_{AB} : Facteur gamma ($\gamma_{\mathrm{AB}} = 1/\sqrt{1 - v_{x\mathrm{AB}}{}^2 / c^2}$, $v^2 = v_{x\mathrm{AB}}{}^2 = v_{x\mathrm{BA}}{}^2$, $\gamma_{\mathrm{AB}} = \gamma_{\mathrm{BA}}$)

<u>Preuve :</u>

Considérons une expérience où il y a la mesure d'un événement 1 à $\left(x_{\mathrm{A(1)}}, t_{\mathrm{A(1)}}\right)$ et un événement 2 à $\left(x_{\mathrm{A(2)}}, t_{\mathrm{A(2)}}\right)$ et que le référentiel A est en mouvement à vitesse $v_{x\mathrm{AB}}$ par rapport à un référentiel B. Effectuons la transformation de Lorentz de Δx_{A} et Δt_{A} vers le référentiel B à partir de la définition de Δx_{B} et Δt_{B} :

$\Delta x_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{B(2)}} - x_{\mathrm{B(1)}}$ $\Rightarrow$ $\Delta x_{\mathrm{B}} = \gamma\left(x_{\mathrm{A(2)}} + v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{A(2)}}\right) - \gamma\left(x_{\mathrm{A(1)}} + v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{A(1)}}\right)$

$\Rightarrow$ $\Delta x_{\mathrm{B}} = \gamma\left(x_{\mathrm{A(2)}} + v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{A(2)}} - x_{\mathrm{A(1)}} - v_{x\mathrm{AB}} t_{\mathrm{A(1)}}\right)$

$\Rightarrow$ $\Delta x_{\mathrm{B}} = \gamma\left(x_{\mathrm{A(2)}} - x_{\mathrm{A(1)}} + v_{x\mathrm{AB}}\left(t_{\mathrm{A(2)}} - t_{\mathrm{A(1)}}\right)\right)$

$\Rightarrow$ $\Delta x_{\mathrm{B}} = \gamma\left(\Delta x_{\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}} \Delta t_{\mathrm{A}}\right)$ ■

$\Delta t_{\mathrm{B}} = t_{\mathrm{B(2)}} - t_{\mathrm{B(1)}}$ $\Rightarrow$ $\Delta x_{\mathrm{B}} = \gamma\left(t_{\mathrm{A(2)}} + \dfrac{x_{\mathrm{A(2)}} v_{x\mathrm{AB}}}{c^2}\right) - \gamma\left(t_{\mathrm{A(1)}} + \dfrac{x_{\mathrm{A(1)}} v_{x\mathrm{AB}}}{c^2}\right)$

$\Rightarrow$ $\Delta x_{\mathrm{B}} = \gamma\left(t_{\mathrm{A(2)}} + \dfrac{x_{\mathrm{A(2)}} v_{x\mathrm{AB}}}{c^2} - t_{\mathrm{A(1)}} - \dfrac{x_{\mathrm{A(1)}} v_{x\mathrm{AB}}}{c^2}\right)$

$\Rightarrow$ $\Delta x_{\mathrm{B}} = \gamma\left(t_{\mathrm{A(2)}} - t_{\mathrm{A(1)}} + \dfrac{v_{x\mathrm{AB}}}{c^2}\left(x_{\mathrm{A(2)}} - x_{\mathrm{A(1)}}\right)\right)$

$\Rightarrow$ $\Delta t_{\mathrm{B}} = \gamma\left(\Delta t_{\mathrm{A}} + \dfrac{\Delta x_{\mathrm{A}} v_{x\mathrm{AB}}}{c^2}\right)$ ■

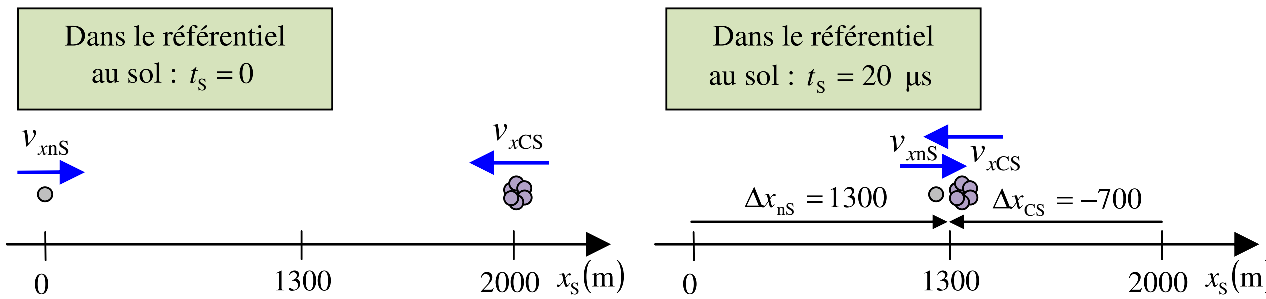
Situation C : *La collision entre deux particules*. Un atome de carbone et un neutron séparé par une distance de 2 km se dirige l'un vers l'autre. Ils entrent en collision 20 µs plus tard. Le site de la collision à lieu à une distance de 0,7 km de la position initiale de l'atome de carbone. Toutes ces mesures sont effectuées par rapport au sol. On désire évaluez la vitesse du neutron dans le référentiel de l'atome de carbone.

Évaluons le déplacement du neutron par rapport au sol :

$$\Delta x_{nS} = d_0 - \Delta x_{CS} \quad \Rightarrow \quad \Delta x_{nS} = (2 \text{ km}) - (0{,}7 \text{ km})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta x_{nS} = 1{,}3 \text{ km}}$$

Considérons le neutron du côté gauche et l'atome de carbone du côté droit selon l'axe x. Représentons nos deux événements selon le référentiel au sol :



Afin d'évaluer la vitesse du neutron par rapport au carbone, nous devons évaluer l'expression suivante :

$$\underline{\text{Expression à évaluer :}} \quad v_{xnC} = \frac{\Delta x_{nC}}{\Delta t_{nC}}$$

Évaluons la vitesse de l'atome de carbone par rapport au sol :

$$v_{xCS} = \frac{\Delta x_{CS}}{\Delta t_{CS}} \quad \Rightarrow \quad v_{xCS} = \frac{(-0{,}7 \times 10^3)}{(20 \times 10^{-6})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{xCS} = -3{,}5 \times 10^7 \text{ m/s}} \qquad (v_{xCS} = -0{,}1167\,c)$$

Évaluons la vitesse relative du sol par rapport à l'atome de carbone :

$$v_{xCS} = -v_{xSC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{xSC} = 3{,}5 \times 10^7 \text{ m/s}} \qquad (v_{xSC} = 0{,}1167\,c)$$

Évaluons le facteur gamma pour effectuer une transformation de Lorentz du référentiel au sol vers le référentiel de l'atome de carbone :

$$\gamma_{SC} = \frac{1}{\sqrt{1 - {v_{xSC}}^2 / c^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{SC} = \frac{1}{\sqrt{1 - (3{,}5 \times 10^7)^2 / (3 \times 10^8)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\gamma_{SC} = 1{,}0069}$$

Évaluons le déplacement du neutron dans le référentiel de l'atome de carbone :

$$\Delta x_{\text{nC}} = \gamma_{\text{SC}}\left(\Delta x_{\text{nS}} + v_{x\text{SC}}\Delta t_{\text{nS}}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta x_{\text{nC}} = (1{,}0069)\left(\left(1{,}3\times10^{3}\right) + \left(3{,}5\times10^{7}\right)\left(20\times10^{-6}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta x_{\text{nC}} = 2013{,}8 \ \text{m}}$$

Évaluons le temps de déplacement du neutron dans le référentiel de l'atome de carbone :

$$\Delta t_{\text{nC}} = \gamma_{\text{SC}}\left(\Delta t_{\text{nS}} + \frac{\Delta x_{\text{nS}} v_{x\text{SC}}}{c^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{\text{nC}} = (1{,}0069)\left(\left(20\times10^{-6}\right) + \frac{\left(1{,}3\times10^{3}\right)\left(3{,}5\times10^{7}\right)}{\left(3\times10^{8}\right)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_{\text{nC}} = 20{,}647\times10^{-6}\,\text{s}}$$

Évaluons la vitesse du neutron par rapport à l'atome de carbone :

$$v_{x\,\text{nC}} = \frac{\Delta x_{\text{nC}}}{\Delta t_{\text{nC}}} \quad \Rightarrow \quad v_{x\,\text{nC}} = \frac{(2013{,}8)}{\left(20{,}647\times10^{-6}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x\,\text{nC}} = 9{,}7545\times10^{7}\ \text{m/s}} \qquad (\, v_{x\,\text{nC}} = 0{,}3251\,c\,)$$

<u>Remarque :</u>

- Les vitesses du neutron et de l'atome du carbone par rapport au sol sont égales à :

$$v_{x\,\text{nS}} = \frac{\Delta x_{\text{nS}}}{\Delta t_{\text{nS}}} = \frac{\left(1{,}3\times10^{3}\right)}{\left(20\times10^{-6}\right)} = 0{,}2167\,c \qquad \text{et} \qquad v_{x\text{CS}} = \frac{\Delta x_{\text{CS}}}{\Delta t_{\text{CS}}} = -0{,}1167\,c$$

- Selon l'addition relative des vitesses Galiléenne, la vitesse du neutron par rapport à l'atome de carbone serait égale à :

$$v_{x\,\text{nC}} = v_{x\,\text{nS}} + v_{x\text{SC}} = v_{x\,\text{nS}} - v_{x\text{CS}} = (0{,}2167) - (-\,0{,}1167\,c) = 0{,}3334\,c \neq 0{,}3251\,c$$

- Il existe une transformation pouvant résoudre plus rapidement la situation précédente et elle sera présentée au chapitre 4.6.