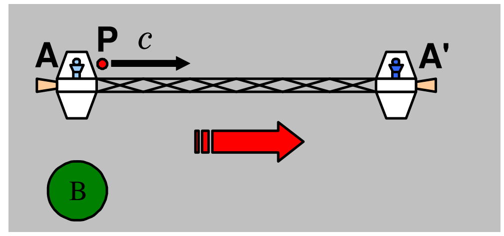
Chapitre 4.4 – La relativité de la simultanéité

Du mouvement dans l'*Altaïr*

Afin d'illustrer un dernier phénomène relié à la relativité restreinte, l'*Altaïr* va effectuer l'expérience suivante près de la planète *B450* :

Situation :

L'*Altaïr* se déplace avec une vitesse relative v par rapport à la planète *B450*.



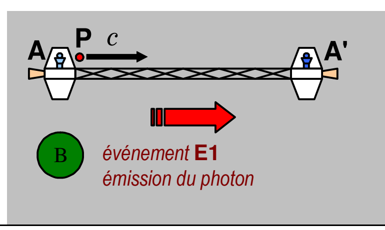
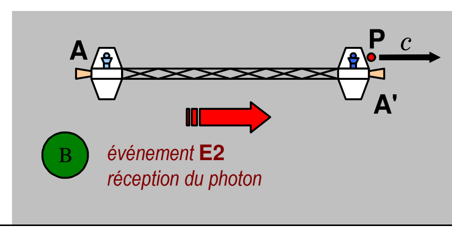
Question 1 :

Combien de **temps** aura parcouru un photon de communication entre Albert (A) et Archibald (A') par rapport à l'*Altaïr* (T_A) et par rapport à la planète *B450* (T_B)?

Question 2 :

Quelle **distance** aura parcouru un photon de communication entre Albert (A) et Archibald (A') par rapport à l'Altaïr (D_A) et par rapport à la planète *B450* (D_B)?

Les deux questions seront étudiées à l'aide de deux événements suivants :

Événement **E1** : Albert (A) émet un photon vers Archibald (A'). 	Événement **E2** : Archibald (A') reçoit le photon émis par Albert (A). 

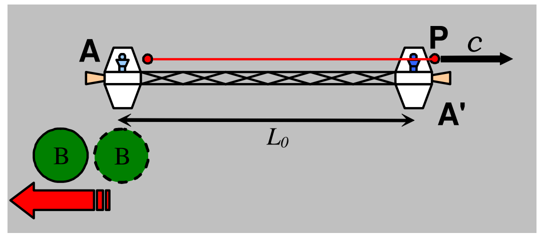
Pour avoir un exemple numérique de la prochaine démonstration, utilisons les valeurs suivantes :

- ❖ La longueur de l'*Altaïr* par rapport à l'*Altaïr* (longueur propre) : $L_0 = 9\ \text{km}$
- ❖ Vitesse relative de l'*Altaïr* par rapport à la planète *B450* : $v = 0{,}6c$

Dans le référentiel de l'*Altaïr*

Dans le référentiel de l'*Altaïr*, nous avons les informations suivantes :

Distance entre Albert (A) et Archibald (A')
selon l'*Altaïr*



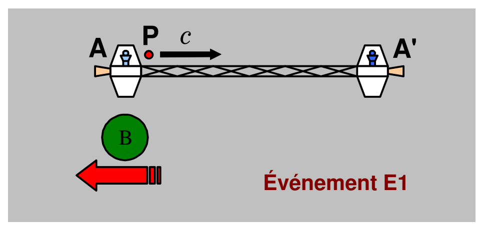
- L'*Altaïr* est immobile.
- La planète *B450* se déplace vers la gauche avec une vitesse relative *v*.
- Le photon voyage avec une vitesse égale à *c*.
- Le photon se déplace sur une longueur propre ($D_A = L_A = L_0$).
- La durée du trajet du photon <u>ne sera pas</u> un intervalle de temps T_A propre, car les deux événements ne sont pas situés aux mêmes endroits dans le référentiel.
- La **cinématique** à résoudre est un **déplacement** dans ce référentiel de l'*Altaïr*.

Voici les mesures associées à nos deux événements :

<u>Événement 1 :</u>

Position : $x_{A(1)} = 0$

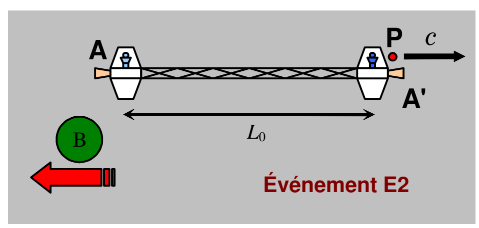
Temps : $t_{A(1)} = 0$



<u>Événement 2 :</u>

Position : $x_{A(2)} = L_0$

Temps : $t_{A(2)} = \dfrac{L_0}{c}$ (avec $L_0 = ct_{A(2)}$)



<u>Durée :</u> $T_A = \Delta t_A = t_{A(2)} - t_{A(1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_A = \dfrac{L_0}{c}}$ (Remplacer $t_{A(1)} = 0$ et $t_{A(2)} = \dfrac{L_0}{c}$)

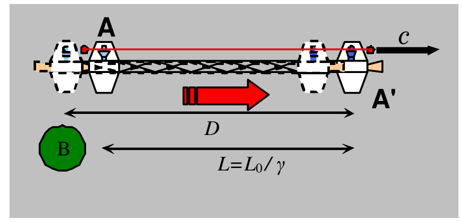
<u>Distance :</u> $D_A = \Delta x_A = x_{A(2)} - x_{A(1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_A = L_0}$ (Remplacer $x_{A(1)} = 0$ et $x_{A(2)} = L_0$)

Dans le référentiel de la planète *B450*

Dans le référentiel de la planète *B450*, nous avons les informations suivantes :

- La planète *B450* est immobile.
- L'*Altaïr* se déplace vers la droite avec une vitesse relative v.
- L'*Altaïr* est contracté, car il est en mouvement. La longueur de l.*Altaïr* selon la planète B450 sera $L = L_0 / \gamma$.

Trajet du photon selon la planète



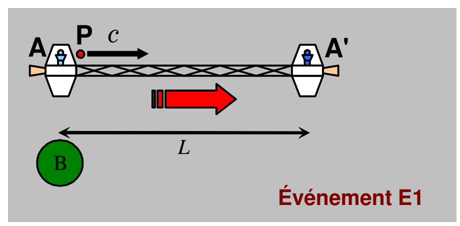
- Le photon voyage avec une vitesse c.
- Pendant que le photon voyage vers Archibald (A'), celui-ci s'éloigne ce qui augmente la durée du voyage du photon.
- La **cinématique** à résoudre est une **poursuite** dans ce référentiel de la planète *B450*.

Voici les mesures associées à nos deux événements :

<u>Événement 1 :</u>

Position : $x_{B(1)} = 0$

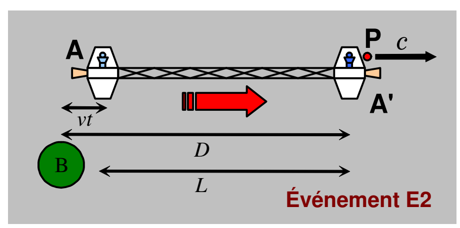
Temps : $t_{B(1)} = 0$



<u>Événement 2 :</u> (avec $x = x_0 + vt$)

Position : $x_{B(2)} = D = L + vt_{B(2)}$

Temps : $t_{B(2)} = \dfrac{D}{c} = \dfrac{L + vt_{B(2)}}{c}$



<u>Durée :</u>

$T_B = \Delta t_B = t_{B(2)} - t_{B(1)}$ $\Rightarrow$ $T_B = t_{B(2)}$ (Remplacer $t_{B(1)} = 0$)

$\Rightarrow$ $T_B = \dfrac{L + vt_{B(2)}}{c}$ (Remplacer $t_{B(2)} = \dfrac{L + vt_{B(2)}}{c}$)

$\Rightarrow$ $T_B = \dfrac{L + vT_B}{c}$ (Remplacer $t_{B(2)} = T_B$ car $t_{B(1)} = 0$)

$\Rightarrow$ $cT_B = L + vT_B$ (Multiplication par c)

$\Rightarrow$ $cT_B - vT_B = L$ (Isoler terme avec T_B)

$\Rightarrow$ $T_B(c - v) = L$ (Factoriser T_B)

$\Rightarrow$ $T_B = \dfrac{1}{c - v} L$ (Isoler T_B)

Avec la contraction des longueurs, nous pouvons évaluer le temps de parcours du photon dans le référentiel de la planète *B450* à partir de la vitesse relative de la lumière par rapport à l'*Altaïr* selon la planète *B450* ($c-v$) et la longueur de l'*Altaïr* selon la planète *B450* (longueur contractée) :

$$T_B = \frac{1}{c-v}L \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_B = \frac{1}{c-v}\frac{L_0}{\gamma}} \quad \text{(Contraction des longueur : } L = \frac{L_0}{\gamma}\text{)}$$

<u>Distance :</u>

$$D_B = \Delta x_B = x_{B(2)} - x_{B(1)} \quad \Rightarrow \quad D_B = x_{B(2)} \quad \text{(Remplacer } x_{B(1)} = 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad D_B = L + vt_{B(2)} \quad \text{(Remplacer } x_{B(2)} = L + vt_{B(2)}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad D_B = L + vT_B \quad \text{(Remplacer } t_{B(2)} = T_B \text{ car } t_{B(1)} = 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad D_B = L + v\left(\frac{1}{c-v}L\right) \quad \text{(Remplacer } T_B = \frac{1}{c-v}L\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad D_B = L\left(1 + \frac{v}{c-v}\right) \quad \text{(Factoriser } L\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad D_B = L\left(\frac{c}{c-v}\right) \quad \text{(Dénominateur commun } c-v\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D_B = \frac{c}{c-v}\frac{L_0}{\gamma}} \quad \text{(Contraction des longueur } L = \frac{L_0}{\gamma}\text{)}$$

Comparaisons des intervalles de temps, des distances et de la vitesse de la lumière

À partir de cette situation, nous remarquons que la durée et la distance entre les deux événements s'ajuste afin de maintenir la vitesse de la lumière à c constante dans les deux référentiels :

<u>Valeur de référence :</u> $v = 0{,}6\ c$, $\gamma = 1{,}25$, $L_0 = 9\ \text{km}$

	Référentiel de l'*Altaïr*	Référentiel de la planète *B450*
Durée : (intervalle de temps)	$T_A = \frac{L_0}{c} = 30\ \mu\text{s}$	$T_B = \frac{1}{c-v}\frac{L_0}{\gamma} = 60\ \mu\text{s}$
Distance : (intervalle d'espace)	$D_A = L_0 = 9\ \text{km}$	$D_B = \frac{c}{c-v}\frac{L_0}{\gamma} = 18\ \text{km}$
Vitesse de la lumière :	$v_A = \frac{D_A}{T_A} = \frac{(9\ \text{km})}{(30\ \mu\text{s})} = c$	$v_B = \frac{D_B}{T_B} = \frac{(18\ \text{km})}{(60\ \mu\text{s})} = c$

Transformation du temps avec défaut de synchronisation

Le **défaut de synchronisation** τ_{A} est une correction de temps supplémentaire qu'il faut apporter à notre dilatation du temps lorsque l'intervalle de temps T_{A} <u>n'est pas un intervalle de temps propre</u>. Plus concrètement, le défaut de synchronisation doit être ajouté à la transformation du temps lorsqu'une expérience nécessite deux observateurs :

$$T_{\mathrm{B}} = \gamma\left(T_{\mathrm{A}} + \tau_{\mathrm{A}}\right) \quad \text{avec} \quad \tau_{\mathrm{A}} = \frac{D_{\mathrm{A}}}{c}\frac{v}{c}$$

où T_{B} : Intervalle de temps entre les deux événements selon le référentiel **B** (s)

T_{A} : Intervalle de temps entre les deux événements selon le référentiel **A** (s)

τ_{A} : Défaut de synchronisation associé au référentiel **A** (s)

γ : Facteur de Lorentz ($\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$)

D_{A} : Distance entre les deux événements selon le référentiel **A** (m)

v : Vitesse relative du référentiel <u>**A** par rapport à **B**</u> (m/s) (Attention au signe !!!)

c : Vitesse de la lumière ($c = 3\times 10^8\ \mathrm{m/s}$)

<u>Preuve :</u>

Débutons notre preuve avec le résultat suivant de la dernière mise en scène :

$$T_{\mathrm{B}} = \frac{1}{c-v}\frac{L_0}{\gamma}$$

Réécrivons notre expression en deux termes :

$$T_{\mathrm{B}} = \frac{1}{c-v}\frac{L_0}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad T_{\mathrm{B}} = \frac{(c+v)}{(c+v)}\frac{1}{(c-v)}\frac{L_0}{\gamma} \qquad \text{(Multiplier par } 1 = \frac{c+v}{c+v}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T_{\mathrm{B}} = \frac{cL_0 + vL_0}{(c+v)(c-v)\gamma} \qquad \text{(Distribution du terme } c+v\text{)}$$

Voici une relation intéressante à introduire dans notre expression :

$$\gamma^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 = \frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{c^2}{c^2-v^2} = \frac{c^2}{(c+v)(c-v)}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$T_{\mathrm{B}} = \frac{cL_0 + vL_0}{(c+v)(c-v)\gamma} \quad \Rightarrow \quad T_{\mathrm{B}} = \frac{\gamma^2}{c^2}\frac{(cL_0 + vL_0)}{\gamma} \qquad \text{(Remplacer le terme } \gamma^2 = \frac{c^2}{(c+v)(c-v)}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T_{\mathrm{B}} = \frac{\gamma}{c^2}\left(cL_0 + vL_0\right) \qquad \text{(Simplifier } \gamma\text{)}$$

Développons notre expression afin de faire intervenir des mesures effectuées par le référentiel A nous permettant ainsi d'établir notre transformation de **A** vers **B** :

$$T_B = \frac{\gamma}{c^2}\left(cL_0 + vL_0\right) \quad \Rightarrow \quad T_B = \gamma\left(\frac{L_0}{c} + \frac{vL_0}{c^2}\right) \quad \text{(Distribuer } c^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \gamma\left(\frac{L_0}{c} + \frac{L_0}{c}\frac{v}{c}\right) \quad \text{(Réécriture du terme } \frac{vL_0}{c^2} = \frac{L_0}{c}\frac{v}{c}\text{)}$$

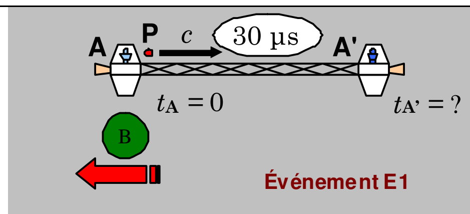
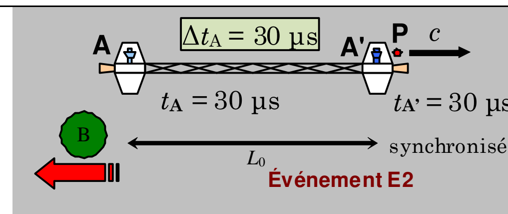
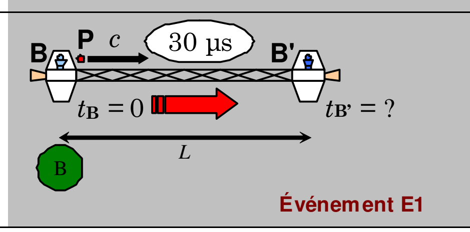
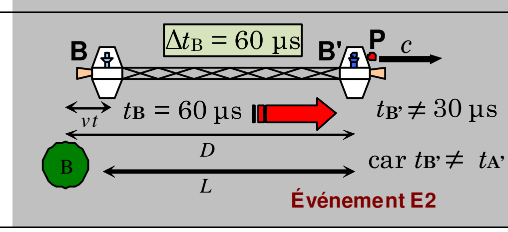
$$\Rightarrow \quad T_B = \gamma\left(T_A + \frac{L_0}{c}\frac{v}{c}\right) \quad \text{(Remplacer } T_A = \frac{L_0}{c}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \gamma\left(T_A + \frac{D_A}{c}\frac{v}{c}\right) \quad \text{(Remplacer } D_A = L_0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T_B = \gamma\left(T_A + \tau_A\right) \ \blacksquare \quad \text{(Remplacer } \tau_A = \frac{D_A}{c}\frac{v}{c}\text{)}$$

Processus de synchronisation et interprétation

Illustrons un mécanisme de synchronisation basé sur la transmission du message « 30 µs », car le temps requis pour effectuer le déplacement du message nécessite 30 µs selon le référentiel de l'*Altaïr* :

<table>
<tr>
<td>Synchronisation dans le référentiel de l'Altaïr :
$T_A = \frac{L_0}{c} = 30\ \mu s$</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Synchronisation dans le référentiel de la planète B450 :
$T_B = \frac{1}{c-v}\frac{L_0}{\gamma} = 60\ \mu s$</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Dans le référentiel de la planète *B450*, on ne peut pas simplement interpréter le message « 30 µs » pour synchroniser l'horloge B', car l'information provient de A' (référentiel de l'*Altaïr*). Ce message nécessite une transformation incluant un défaut de synchronisation (pas temps propre) et une dilatation du temps (A bouge par rapport à B).

Évaluons le défaut de synchronisation associé à la coordonnée de A' selon A :

$$\tau_A = \frac{D_A}{c}\frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \tau_A = \frac{(9\,\text{km})}{c}\frac{(0{,}6\,c)}{c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_A = 18\ \text{us}}$$

Évaluons le temps $t_{B'}$ adéquat à partir de $t_{A'}$ et de la transformation du temps incluant le défaut de synchronisation :

$$T_B = \gamma\left(T_A + \tau_A\right) \quad \Rightarrow \quad T_B = (1{,}25)\left((30\,\mu s) + (18\,\mu s)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_B = 60\ \mu s}$$