# Chapitre 4.3 – La contraction des longueurs

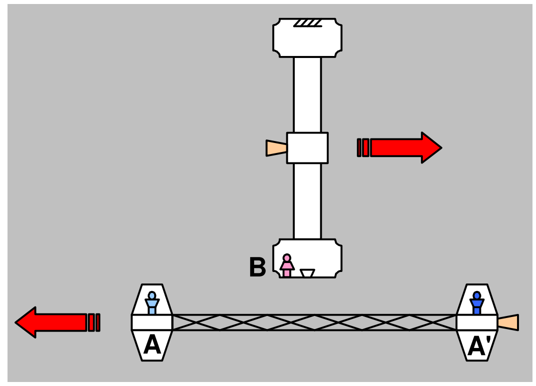
## Retour sur le croisement des deux vaisseaux

Afin d'illustrer un autre phénomène relié à la relativité restreinte, le *Bellatrix* et l'*Altaïr* vont effectuer l'expérience suivante :

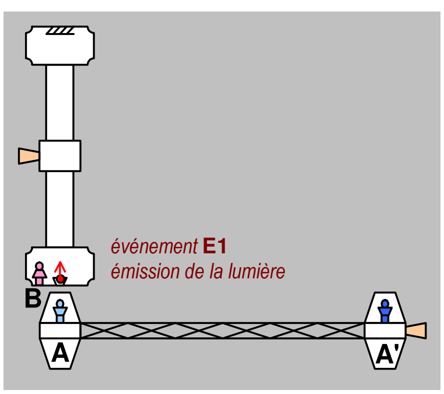
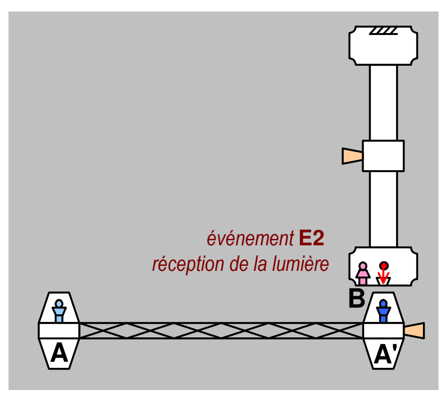
<u>Situation :</u>
Le *Bellatrix* et l'*Altaïr* se croisent à une vitesse relative $v$.

<u>Question :</u>

Quelle est la longueur de l'*Altaïr* requise afin qu'Albert (A) et Archibald (A') puisse observer Béatrice (B) émettre sa lumière et capter sa lumière selon l'*Altaïr* ($L_A$) et selon le *Bellatrix* ($L_B$)?




La question sera étudiée à l'aide de deux événements :

<table>
<tr>
<td><u>Événement E1 :</u><br>Béatrice (B) émet la lumière vers le haut et Béatrice (B) est vis-à-vis Albert (A).<br>
</td>
<td><u>Événement E2 :</u><br>Béatrice (B) reçoit la lumière et Albert (A) s'est éloigné de Béatrice. Nous avons Archibald (A') de présent dans l'Altaïr pour confirmer la réception de la lumière par Béatrice à Albert.<br>
</td>
</tr>
</table>

## Dans le référentiel de l'*Altaïr*

Dans le référentiel de l'*Altaïr*, nous avons les informations suivantes :

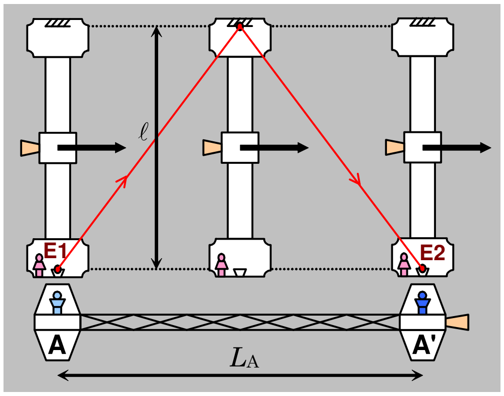
- L'*Altaïr* est immobile.
- Le *Bellatrix* se déplace avec une vitesse $v$.
- Selon la situation traitée au chapitre précédent, la lumière voyage durant le temps suivant avant d'être capté :

$$T_{\mathrm{A}} = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

- Selon la situation traitée au chapitre précédent, la longueur entre Albert (A) et Archibald (A') est égale à :

$$L_{\mathrm{A}} = \frac{2\ell v}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Distance entre Albert (A) et Archibald (A') selon l'*Altaïr*

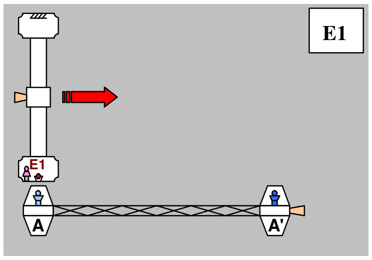



Voici les mesures associées à nos deux événements :

<u>Événement 1 :</u>

Position : $x_{\mathrm{A}(1)} = 0$

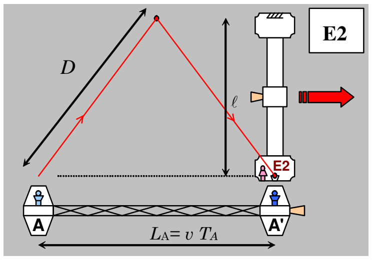
Temps : $t_{\mathrm{A}(1)} = 0$




<u>Événement 2 :</u>

Position : $x_{\mathrm{A}(2)} = L_{\mathrm{A}} = \dfrac{2\ell v}{\sqrt{c^2 - v^2}}$

Temps : $t_{\mathrm{A}(2)} = T_{\mathrm{A}} = \dfrac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}}$




<u>Distance :</u> $D_{\mathrm{A}} = \Delta x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{A}(2)} - x_{\mathrm{A}(1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{\mathrm{A}} = \dfrac{2\ell v}{\sqrt{c^2 - v^2}}}$

<u>Durée :</u> $T_{\mathrm{A}} = \Delta t_{\mathrm{A}} = t_{\mathrm{A}(2)} - t_{\mathrm{A}(1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_{\mathrm{A}} = \dfrac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}}}$

<u>Longueur :</u> $L_{\mathrm{A}} = D_{\mathrm{A}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_{\mathrm{A}} = \dfrac{2\ell v}{\sqrt{c^2 - v^2}}}$

# Dans le référentiel du *Bellatrix*

Dans le référentiel du *Bellatrix*, nous avons les informations suivantes :

- Le *Bellatrix* est immobile.

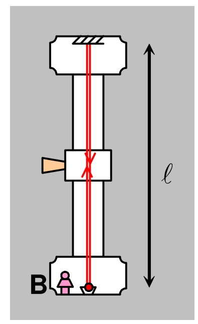
- L'*Altaïr* se déplace à une vitesse de $v$.

- Selon la situation traitée au chapitre précédent, la lumière voyage durant le temps suivant avant d'être capté :

$$T_{\mathrm{B}} = \frac{2\ell}{c}$$

- Puisque les deux événements sont situés au même endroit par rapport au *Bellatrix*, Béatrice devra mesurer l'intervalle de temps $T_{\mathrm{B}}$ entre l'émission de la lumière et la réception de la lumière et multiplier ce temps par la vitesse relative $v$ de l'*Altaïr* afin de mesure la longueur de l'*Altaïr* $L_{\mathrm{B}}$ .

Trajet de la lumière selon le *Bellatrix*

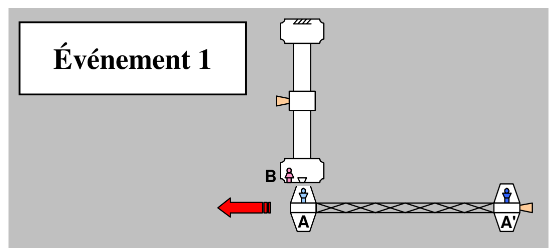



Voici les mesures associées à la position de Albert (A) :

Événement 1 :

Position : $x_{\mathrm{B}(1)} = 0$

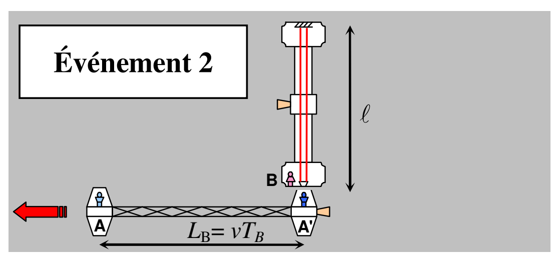
Temps : $t_{\mathrm{B}(1)} = 0$




Événement 2 : (avec $x = vt$ )

Position : $x_{\mathrm{B}(2)} = 0$

Temps : $t_{\mathrm{B}(2)} = \frac{2\ell}{c}$




Distance : $D_{\mathrm{B}} = \Delta x_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{B}(2)} - x_{\mathrm{B}(1)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{D_{\mathrm{B}} = 0}$

Durée : $T_{\mathrm{B}} = \Delta t_{\mathrm{B}} = t_{\mathrm{B}(2)} - t_{\mathrm{B}(1)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{T_{\mathrm{B}} = \frac{2\ell}{c}}$

Longueur : $L_{\mathrm{B}} = vT_{\mathrm{B}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{L_{\mathrm{B}} = \frac{2\ell v}{c}}$

Exemple : (Situation du livre de référence : $v = 0{,}6\ c$ , $\ell = 6\ \text{km}$ )

$$L_{\mathrm{B}} = 7{,}2\ \text{km}$$

## Comparaisons des intervalles de temps, des distances et des longueurs

À partir de cette situation, nous remarquons que la durée entre deux événements n'est pas identique dans les deux référentiels :

Valeur de référence : $v = 0{,}6\ c$ , $\ell = 6\ \text{km}$

| | Référentiel de l'*Altaïr* | Référentiel du *Bellatrix* |
|---|---|---|
| Durée : (intervalle de temps) | $T_{\text{A}} = \dfrac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 50\ \mu\text{s}$ | $T_{\text{B}} = \dfrac{2\ell}{c} = 40\ \mu\text{s}$ |
| Distance : (intervalle d'espace) | $D_{\text{A}} = \dfrac{2\ell v}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 9\ \text{km}$ | $D_{\text{B}} = 0$ |
| Longueur de l'*Altaïr :* | $L_{\text{A}} = D_{\text{A}} = 9\ \text{km}$ | $L_{\text{B}} = \dfrac{2\ell v}{c} = 7{,}2\ \text{km}$ |

**P.S.** Nous avons une contradiction avec la transformation de Galilée, car $T_{\text{A}} \neq T_{\text{B}}$ .

Nous avons une contradiction avec la transformation de Galilée, car $L_{\text{A}} \neq L_{\text{B}}$ .

Bien que les deux événements pour le référentiel **B** ne soient pas simultanés dans cette mise en situation, le calcul effectué pour déterminer la longueur de l'*Altaïr* selon **B** donne quand même une interprétation de longueur.

## Longueur propre

Une **longueur** $L$ est une mesure de distance entre deux événements simultanés ($\Delta t = 0$) par rapport à un référentiel. On utilise la longueur pour définir la taille d'un objet.

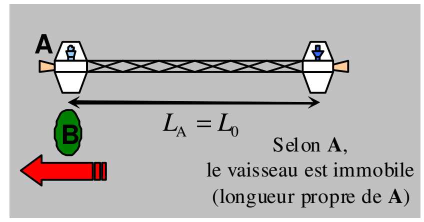
Une **longueur propre** $L_0$ est une longueur tel que l'objet défini par cette longueur est **immobile** par rapport au référentiel (il y a **deux observateurs synchronisés** et **immobiles un par rapport à l'autre** qui effectuent la mesure de la **distance**). Un référentiel qui mesure la longueur propre d'un objet mesure toujours la plus grand longueur de l'objet possible.

Notation mathématique : $\text{longueur propre} = L_0$

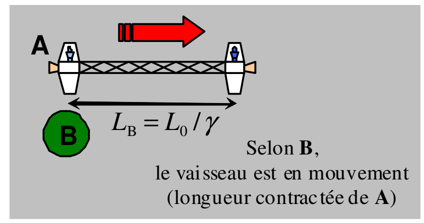
Unité (mètre) : $[L_0] = \text{m}$

# Contraction des longueurs (transformation de la longueur propre)

La contraction d'une longueur $L$ s'applique lorsque l'on veut transformer une longueur propre $L_0$ d'un objet vers un référentiel qui observe l'objet en mouvement à vitesse relative $v$ par rapport à lui et la contraction s'effectue uniquement dans le sens de la vitesse relative :




$$L = L_0 / \gamma$$




où $L$ : Longueur de l'objet en mouvement par rapport à un référentiel (m).

$\gamma$ : Facteur de Lorentz ( $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ).

$L_0$ : Longueur propre (m).

$v$ : Vitesse relative entre les deux référentiels (m/s).

Preuve :

Évaluons la transformation requise pour transformer une longueur propre $L_A = L_0$ dans le référentiel de l'*Altair* A vers une longueur dans le référentiel du *Bellatrix* B associée à notre situation précédente :

$$L_B = \frac{2\ell v}{c} \quad \Rightarrow \quad L_B = \frac{2}{c}\ell v \qquad \text{(Reformulation)}$$

$$\Rightarrow \quad L_B = \frac{2}{c}\left( L_A \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{2} \right) \qquad \text{(Remplacer } L_A = \frac{2\ell v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad L_B = L_A \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} \qquad \text{(Simplification du facteur 2)}$$

$$\Rightarrow \quad L_B = L_A \frac{\sqrt{c^2 \left(1 - v^2/c^2\right)}}{c} \qquad \text{(Factoriser } c^2 \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad L_B = L_A \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1} \qquad \text{(Sortir } c^2 \text{ de la racine et simplifier } c \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_B = \frac{L_A}{\gamma}} \qquad \text{(Remplacer } \frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1} \text{)}$$

Exemple : (Situation du livre de référence : $v = 0{,}6\ c$ , $\ell = 6\ \text{km}$ )

$$L_A = 9\ \text{km} \quad \text{et} \quad \gamma = 1{,}25 \quad \text{ce qui nous donne} \quad L_B = \frac{L_A}{\gamma} = \frac{(9)}{(1{,}25)} = 7{,}2\ \text{km}$$

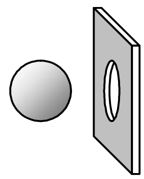
**P.S.** Il est important de remarquer que cette transformation est valide seulement lorsque la mesure de $L_A$ est effectuée à partir de **deux observateurs synchronisés** et **immobiles l'un par rapport à l'autre** (exemple : Albert et Archibald).

# Sens de la contraction des longueurs[1]

La contraction des longueurs s'effectue seulement dans le sens des vitesses relatives, car une **contraction** dans le **sens perpendiculaire** des **vitesses relatives** introduirait des **paradoxes** (contradiction sur l'explication d'un événement).

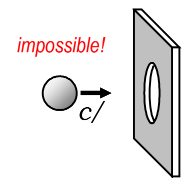
Voici un exemple simple qui introduirait un paradoxe s'il existait une contraction des longueurs perpendiculaires à la vitesse relative :

<u>Situation :</u> Un boulet de rayon R s'approche d'une plaque ayant une ouverture circulaire de rayon R avec une vitesse relative $v = c/2$.



<u>Dans le référentiel de la plaque :</u>

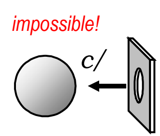
- Le boulet s'approche de la plaque avec une vitesse relative $v = c/2$.
- Il y a contraction des longueurs parallèles et perpendiculaires à la vitesse relative.
- Le boulet rétrécie.
- La conclusion de l'événement : le **boulet passe** dans **l'ouverture**.



Référentiel de la plaque

<u>Dans le référentiel du boulet :</u>

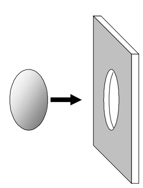
- La plaque s'approche du boulet avec une vitesse relative $v = c/2$.
- Il y a contraction des longueurs parallèles et perpendiculaire à la vitesse relative.
- La plaque rétrécie ce qui provoque une diminution de l'ouverture.
- La conclusion de l'événement : le **boulet ne passe pas** dans **l'ouverture**.



Référentiel du boulet

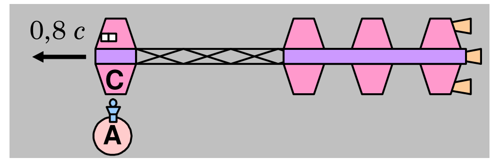
Puisqu'il y a **contradiction** entre les **conclusions** effectuées par **deux observateurs** situés dans **deux référentiels différents**, cela prouve qu'il **ne peut pas** y avoir de **contraction des longueurs** dans le sens **perpendiculaire** de la **vitesse relative**.

Voici le comportement du boulet dans le référentiel de la plaque :


Référentiel de la plaque

[1] Cette section est discutée dans la section 4.4 du livre de référence.

**Situation 1 : *La longueur propre du Camelopardalis*.** Le *Camelopardalis* voyage à 0,8 $c$ par rapport à un petit astéroïde et il le frôle. D'après un astronaute situé sur l'astéroïde, cela prend 12,5 μs pour que la longueur du vaisseau défile devant l'astéroïde. On désire déterminer la longueur propre du *Camelopardalis*.




Nous avons deux référentiels à utiliser dans cette situation :

Référentiel **C** : *Camelopardalis*

Référentiel **A** : Astéroïde

La vitesse relative entre nos deux référentiels est la suivante :

$$v = 0{,}8\,c$$

Notre situation comporte deux événements :

**E1** : L'avant du *Camelopardalis* est vis-à-vis l'astéroïde.

**E2** : L'arrière du *Camelopardalis* est vis-à-vis l'astéroïde.

Évaluons notre facteur gamma :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}8c/c)^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = 1{,}667}$$

Dans le référentiel de l'astéroïde (**A**), les deux événements sont situés **au même endroit**. Le référentiel de l'astéroïde mesure alors l'intervalle temps propre ($T_0 = T_A$) et une mesure de longueur contractée :

<u>Distance :</u> $D_A = 0$ (temps propre)

<u>Durée :</u> $T_A = 12{,}5\ \mu\text{s} = 12{,}5\times10^{-6}\,\text{s}$

<u>Longueur :</u> $L_A = vT_A \quad \Rightarrow \quad L_A = (0{,}8\,c)(12{,}5\times10^{-6})$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_A = 3000\ \text{m}}$$

Dans le référentiel du *Camelopardalis* (**C**), les deux événements sont situés à **deux endroits différents**. La mesure de la longueur sera une longueur propre ($L_0 = L_C$) :

<u>Longueur :</u> $L = \dfrac{L_0}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad (L_A) = \dfrac{(L_C)}{\gamma}$

$$\Rightarrow \quad (3000) = \frac{(L_C)}{(1{,}667)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_C = 5000\ \text{m}}$$

## Comparaison entre la dilatation du temps et la contraction des longueurs

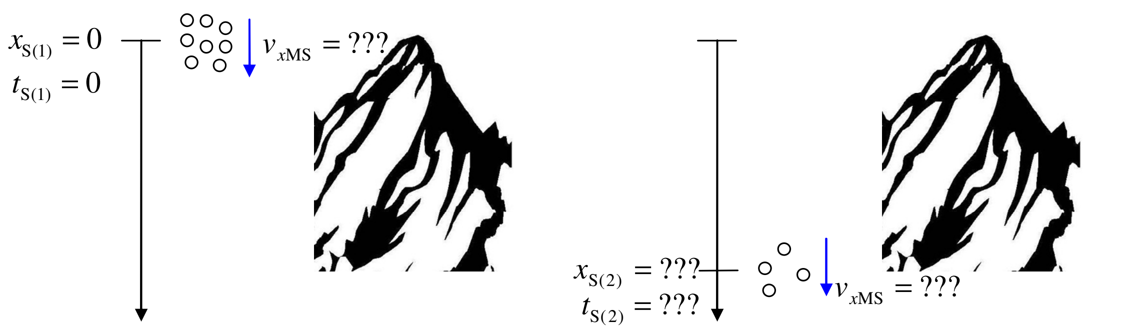
Lorsque nous comparons l'expérience de l'*Altaïr* et du *Bellatrix*, nous remarquons que la relativité déforme le temps et l'espace tout en préservant la vitesse relative $v$ entre nos deux vaisseaux :

| | Référentiel A (*Altaïr*) (longueur propre $L_0$) | Référentiel B (*Bellatrix*) (temps propre $T_0$) |
|---|---|---|
| Temps | $T_A = \gamma T_0$ | $T_B = T_0$ |
| Longueur | $L_A = L_0$ | $L_B = \dfrac{L_0}{\gamma}$ |
| Vitesse relative | $v = \dfrac{L_A}{T_A} = \dfrac{(L_0)}{(\gamma T_0)}$ | $v = \dfrac{L_B}{T_B} = \dfrac{(L_0/\gamma)}{(T_0)}$ |
| Conclusion | Même vitesse relative : $v = \dfrac{L_0}{\gamma T_0}$ | |

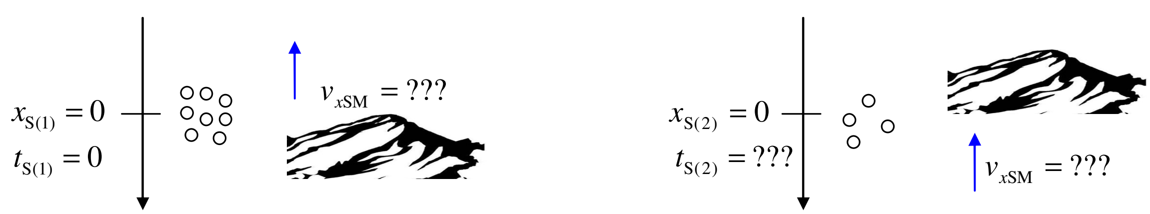
## Interprétation de la désintégration du muon

À compléter …

Référentiel du sol :




Référentiel du muon :




## Paradoxe de la grange

En construction …