

Chapitre 4.1a – La relativité de Galilée

Référentiel

Un **référentiel** est un **point de repère (système d'axe)** par rapport au quel on peut prendre une **mesure de position** et de **temps**. Il est préférable d'utiliser une graduation commune pour tous les référentiels utilisés dans une situation.

Exemple :

Évaluer la position horizontale d'une balle rouge dans le référentiel **A** et dans le référentiel **B**.

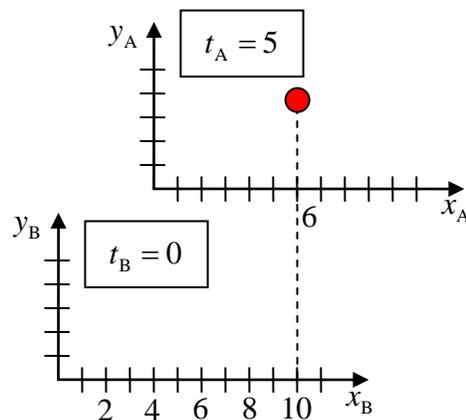
Selon le référentiel **A** :

$$x_A = 6 \quad \text{à} \quad t_A = 5$$

Selon le référentiel **B** :

$$x_B = 10 \quad \text{à} \quad t_B = 0$$

Les deux référentiels ont des valeurs de x et de t différentes, mais ils s'accordent sur le fait qu'ils positionnent le même objet au même instant.



Position d'une balle rouge exprimée dans un référentiel **A** et **B**.

Événement

Un **événement** est une observation d'un phénomène à une **position** x donnée et à un **temps** t donné. La description de l'événement et la valeur de ses mesures **dépendent** du choix du référentiel.

Exemple :

- Albert est en bas de la tour (x) à 2h a.m. (t). (1 évé.)
- Albert monte la tour de 100 m (Δx) en 15 minutes (Δt). (2 évé.)



<https://www.flickr.com/photos/sleepyjeanie/5738474150/>
Un événement correspond à un lieu et un moment.

La durée

La **durée** est une **variation de temps** entre **deux événements** mesurée à partir d'un même référentiel :

$$T = \Delta t = t_2 - t_1$$

- où
- T : Durée entre les deux événements dans un référentiel commun (s)
 - t_2 : Temps associé à l'événement 2 par rapport au référentiel (s)
 - t_1 : Temps associé à l'événement 1 par rapport au référentiel (s)

La longueur

La **longueur** est une **variation de position** entre **deux événements mesurés simultanément** mesurée à partir d'un même référentiel :

$$L = \Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{lorsque} \quad \Delta t = 0$$

- où
- L : Longueur entre les deux événements par rapport à un référentiel (m)
 - x_2 : Position de l'événement 2 par rapport au référentiel (m)
 - x_1 : Position de l'événement 1 par rapport au référentiel (m)

La distance

La **distance** est une **variation de position** entre **deux événements non simultanés** mesurée à partir d'un même référentiel :

$$D = \Delta x(t) = x_2(t_2) - x_1(t_1) \quad \text{lorsque} \quad \Delta t \neq 0$$

- où
- D : Distance entre les deux événements par rapport à un référentiel (m)
 - $x_2(t_2)$: Position de l'événement 2 par rapport au référentiel (m)
 - $x_1(t_1)$: Position de l'événement 1 par rapport au référentiel (m)

Référentiel inertiel et non inertiel

Un **référentiel inertiel** est un référentiel où la **1^{ère} loi de Newton** est **applicable** ($\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}$ est constant). Ce référentiel est **immobile** ou se **déplace à vitesse constante** par rapport à un autre référentiel inertiel.

Un **référentiel non inertiel** est un **référentiel** où la **1^{ère} loi de Newton** est en violation. Ce type de référentiel subit alors une **accélération** par rapport à un autre référentiel inertiel.

Référentiel inertiel	Référentiel non inertiel
Une voiture (A) se déplace à une vitesse constante $v_{xAB} = 3$ par rapport au sol (B).	Un tourniquet (A) tourne à une vitesse angulaire constante ω_{zAB} par rapport au sol (B).

Une transformation entre deux référentiels

Une **transformation** entre **deux référentiels** est une **équation mathématique** permettant de faire **correspondre** une **mesure** effectuée dans un **référentiel A** avec une **mesure** effectuée dans un **référentiel B**. Cette transformation relie mathématiquement un événement mesuré dans deux contextes différents.

Une transformation s'utilise de la façon suivante :

Si l'on mesure un événement dans le référentiel A et que l'on connaît la transformation pour passer à un référentiel B, on peut calculer la mesure de l'événement dans le référentiel de B.



<http://www.euroconte.org/de-de/anthropologiedelacommunicationorale/lalett%C3%A9ratureorale/dictionnairedelalitt%C3%A9ratureorale.aspx>

Une transformation est une « traduction » d'une mesure d'un référentiel à un autre.

La transformation de Galilée

La **transformation de Galilée** permet de **convertir** des **mesures** (x , v_x , t) **d'un référentiel inertiel A** vers un **référentiel inertiel B** qui ont les caractéristiques suivantes :

- 1) Le référentiel **A** se déplace à une vitesse relative v_{xAB} par rapport au référentiel **B**.
- 2) L'origine du référentiel **A** coïncide avec l'origine du référentiel **B** à $t_A = t_B = 0$.

Transformation de A vers B	Transformation de B vers A
<ul style="list-style-type: none"> • $x_B = x_A + v_{xAB}t_A$ • $v_{xB} = v_{xA} + v_{xAB}$ • $y_B = y_A$ • $t_B = t_A$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $x_A = x_B - v_{xAB}t_B$ • $v_{xA} = v_{xB} - v_{xAB}$ • $y_A = y_B$ • $t_A = t_B$

où

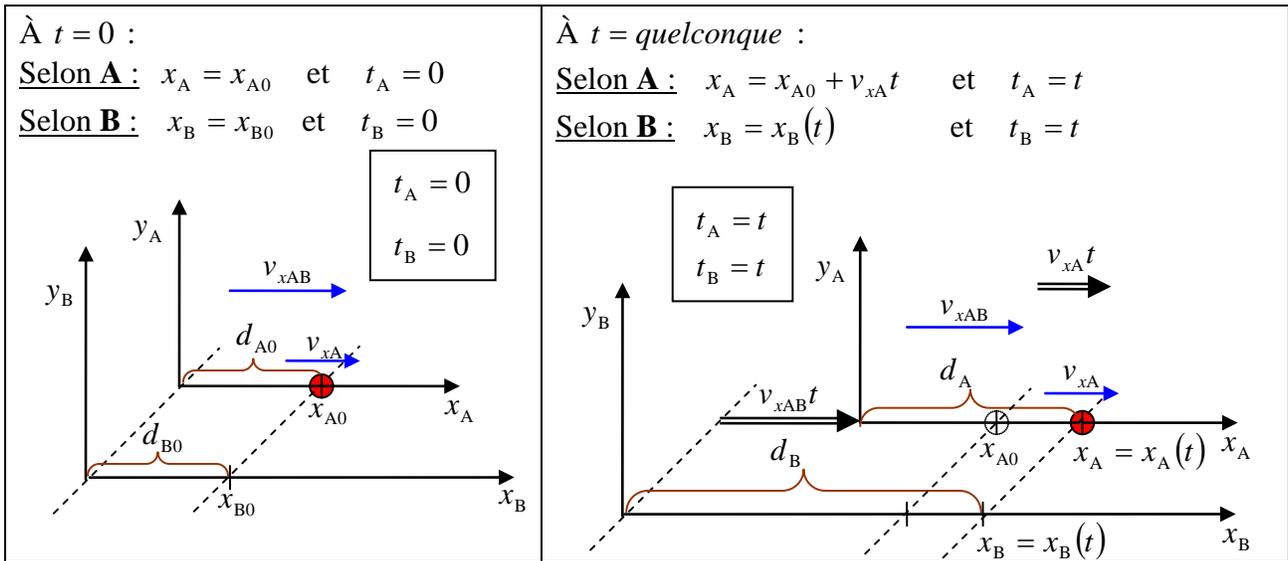
- x_A : Position horizontale d'un événement selon le référentiel **A** (m).
- x_B : Position horizontale d'un événement selon le référentiel **B** (m).
- v_{xA} : Vitesse d'un événement selon le référentiel **A** (s).
- v_{xB} : Vitesse d'un événement selon le référentiel **B** (s).
- y_A : Position verticale d'un événement selon le référentiel **A** (m).
- y_B : Position verticale d'un événement selon le référentiel **B** (m).
- t_A : Moment (temps) d'un événement selon le référentiel **A** (s).
- t_B : Moment (temps) d'un événement selon le référentiel **A** (s).
- v_{xAB} : Vitesse du référentiel A par rapport au référentiel **B** (m/s).

P.S. Le **signe** associé de la **vitesse** v_{xAB} est **très important**, car il précise le **sens** de la **vitesse**.

- ❖ Référentiel **A** se déplace dans le **sens positif** de l'**axe x** par rapport à **B**, alors $v_{xAB} > 0$.
- ❖ Référentiel **A** se déplace dans le **sens négatif** de l'**axe x** par rapport à **B**, alors $v_{xAB} < 0$.

Preuve :

Considérons un objet situé initialement à la coordonnée x_{A0} et se déplaçant à vitesse constante v_{xA} selon un référentiel inertiel **A** étant lui-même en mouvement à vitesse constante v_{xAB} par rapport à un référentiel **B** inertiel. Évaluons la transformation de la position du référentiel **A** vers **B** sachant que les deux référentiels sont identiques à $t_A = t_B = 0$ et qu'il s'est écoulé un temps t dans le référentiel **A** et **B** :



Par un simple ajout de translation $v_{xAB}t$ du référentiel **A** par rapport à **B**, nous obtenons la transformation de Galilée de la position :

$$x_B = x_A + v_{xAB}t \quad \blacksquare (1)$$

Évaluons la vitesse de l'objet dans le référentiel **B** à partir de la transformation de Galilée de la position :

$$\begin{aligned}
 x_B = x_A + v_{xAB}t &\Rightarrow x_B = (x_{A0} + v_{xA}t) + v_{xAB}t && (\text{MUA : } x_A = x_{A0} + v_{xA}t, a_{xA} = 0) \\
 &\Rightarrow x_B = x_{A0} + (v_{xA} + v_{xAB})t && (\text{Factoriser } t) \\
 &\Rightarrow \frac{d}{dt}(x_B) = \frac{d}{dt}(x_{A0} + (v_{xA} + v_{xAB})t) && (\text{Dériver par rapport au temps } t) \\
 &\Rightarrow \frac{dx_B}{dt} = (v_{xA} + v_{xAB}) \frac{dt}{dt} && (v_{xA}, v_{xAB} \text{ et } x_{A0} \text{ sont des constantes}) \\
 &\Rightarrow v_{xB} = v_{xA} + v_{xAB} && \blacksquare (2) \quad \left(\frac{dx_B}{dt} = v_{xB} \text{ et } \frac{dt}{dt} = 1 \right)
 \end{aligned}$$

Situation A : Du bowling dans le train. Durant un voyage, Albert joue une partie de bowling dans un train se déplaçant à 30 m/s (108 km/h) par rapport au sol. À $t = 0$, la boule est située $x_A = 0$ pour Albert et à $x_B = 0$ pour le sol et elle roule à une vitesse de 1,2 m/s par rapport à Albert. On désire évaluer **(a)** la position de la boule par rapport à Albert à 5 secondes et **(b)** la position de la boule par rapport au sol à 5 secondes (avec la transformation de Galilée), **(c)** la vitesse de la boule par rapport au sol et **(d)** la position de la boule par rapport au sol à 5 secondes (avec la résolution du MUA dans le référentiel au sol).

Dans ce problème, nous avons deux référentiels :

Référentiel **A** : Le train.

Référentiel **B** : Le sol.

Utilisons les équations du MUA pour positionner la boule dans le référentiel **A** :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow x_A = x_{A0} + v_{xA0}t_A + \frac{1}{2}a_{xA}t_A^2 \quad (\text{Appliquer l'équation dans le réf. A})$$

$$\Rightarrow x_A = (0) + (1,2)(5) + \frac{1}{2}(0)(5)^2 \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow \boxed{x_A = 6 \text{ m}} \quad (\mathbf{a})$$

Avec la transformation de Galilée, transposons notre mesure effectuée dans le référentiel **A** vers le référentiel **B** :

Avec : $x_A = 6 \text{ m}$ à $t_A = 5 \text{ s}$, $v_{xAB} = 30 \text{ m/s}$

$$x_B = x_A + v_{xAB}t_A \Rightarrow x_B = (6) + (30)(5) \quad (\text{Remplacer } x_A, t_A \text{ et } v_{xAB})$$

$$\Rightarrow \boxed{x_B = 156 \text{ m}} \quad (\mathbf{b})$$

Utilisons la transformation de Galilée des vitesses afin de transformer la vitesse de la boule mesurée par Albert (référentiel **A**) vers le référentiel du sol (référentiel **B**) :

$$v_{xB} = v_{xA} + v_{xAB} \Rightarrow v_{xB} = (1,2) + (30) \quad (\text{Remplacer valeur num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{xB} = 31,2 \text{ m/s}} \quad (\mathbf{c})$$

À partir de la vitesse de la boule v_{xB} par rapport au référentiel **B**, évaluons la position de la boule par rapport au référentiel **B** :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow x_B = x_{B0} + v_{xB0}t_B + \frac{1}{2}a_{xB}t_B^2 \quad (\text{Appliquer l'équation dans le réf. B})$$

$$\Rightarrow x_B = (0) + (31,2)(5) + \frac{1}{2}(0)(5)^2 \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{x_B = 156 \text{ m}} \quad (\mathbf{d})$$

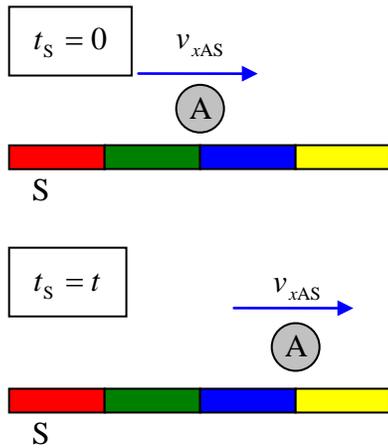
On remarque que la coordonnée x_B calculée en **(b)** par transformation de Galilée est identique la celle calculée en **(d)** par résolution de la cinématique dans le référentiel **B**.

La relativité des vitesses

La vitesse v_{xAS} d'un objet **A** par rapport à un référentiel **S** fait référence à deux référentiels (l'objet lui-même **A** et le référentiel qui observe l'objet en mouvement **S**). Si l'on mesure la vitesse v_{xAA} de l'objet **A** par rapport à son propre référentiel **A**, alors l'objet est toujours immobile ($v_{xAA} = 0$). Du point de vue du référentiel **A**, l'objet **A** est immobile et le référentiel **S** est en mouvement et vis versa. Chaque référentiel affirme que l'autre référentiel est en mouvement tel qu'illustré ci-bas :

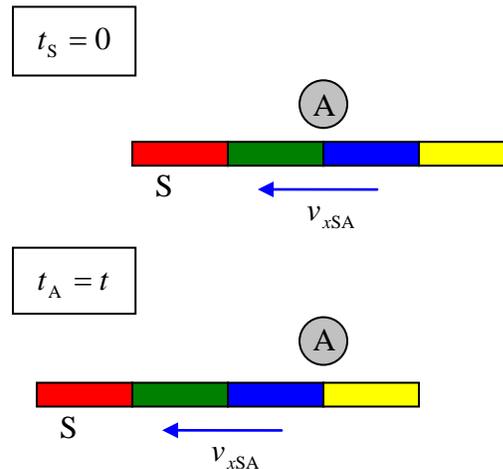
Vitesse de la balle par rapport au sol :

v_{xAS} : Vitesse de **A** par rapport à **S**



Vitesse du sol par rapport à la balle :

v_{xSA} : Vitesse de **S** par rapport à **A**



La relation mathématique existant entre deux vitesses relatives v_{xAS} et v_{xSA} est la suivante :

$$v_{xAS} = -v_{xSA}$$

où v_{xAS} : Vitesse de **A** par rapport à **S** (m/s)

v_{xSA} : Vitesse de **S** par rapport à **A** (m/s)

L'addition Galiléenne des vitesses relatives

À partir de la transformation des vitesses de Galilée et de la notion de vitesse relative, nous pouvons définir la règle suivante pour additionner des vitesses relatives :

$$v_{xAR} = v_{xAB} + v_{xBR}$$

où v_{xAR} : Vitesse selon l'axe x de **A** par rapport à **R** (m/s).

v_{xAB} : Vitesse selon l'axe x de **A** par rapport à **B** (m/s).

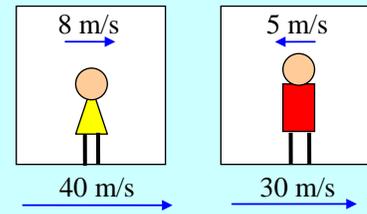
v_{xBR} : Vitesse selon l'axe x de **B** par rapport à **R** (m/s).



<http://cafresnoyathle.free.fr/actualites-11-12-p4.php>

Lancer un javelot en courant permet à celui-ci d'avoir une plus grande vitesse par rapport au sol avant d'être lancé.

Situation B : La courte retrouvaille. Béatrice ne pouvant plus attendre son Albert, elle décide de prendre le prochain train allant dans la même direction qu'Albert. Le train d'Albert se déplace à 30 m/s (108 km/h) et le train de Béatrice se déplace à 40 m/s (144 km/h). Tout juste avant de croiser son regard, Béatrice court vers Albert à une vitesse de 8 m/s par rapport à son train et Albert court vers Béatrice à une vitesse de 5 m/s par rapport à son train. On désire évaluer la vitesse d'Albert par rapport à Béatrice.



Dans ce problème, nous pouvons utiliser 5 référentiels différents :

Référentiel 1	Béatrice
Référentiel 2	Le train de Béatrice
Référentiel 3	Le sol
Référentiel 4	Le train d'Albert
Référentiel 5	Albert

Dans le problème, nous avons les informations suivantes :

- 1) Vitesse de Albert par rapport à son train : $v_{x54} = -5 \text{ m/s}$
- 2) Vitesse du train de Albert par rapport au sol : $v_{x43} = 30 \text{ m/s}$
- 3) Vitesse du train de Béatrice par rapport au sol : $v_{x23} = 40 \text{ m/s}$
- 4) Vitesse de Béatrice par rapport à son train : $v_{x12} = 8 \text{ m/s}$

Pour évaluer la vitesse de Albert (5) par rapport à Béatrice (1), il faut évaluer la vitesse relative v_{x51} .

Voici une série de transformations nous permettant d'évaluer la vitesse relative v_{x51} :

$$1) v_{x53} = v_{x54} + v_{x43} \qquad 2) v_{x52} = v_{x53} + v_{x32} \qquad 3) v_{x51} = v_{x52} + v_{x21}$$

En combinant ces trois transformations, nous obtenons l'expression simplifiée suivante :

$$\begin{aligned}
 v_{x51} &= v_{x54} + v_{x43} + v_{x32} + v_{x21} \Rightarrow v_{x51} = (-5) + (30) + v_{x32} + v_{x21} && \text{(Remplacer valeurs connues)} \\
 &\Rightarrow v_{x51} = 25 + (-v_{x23}) + (-v_{x12}) && \text{(Utiliser } v_{xAS} = -v_{xSA} \text{)} \\
 &\Rightarrow v_{x51} = 25 - (40) - (8) && \text{(Remplacer autres valeurs)} \\
 &\Rightarrow \boxed{v_{x51} = -23 \text{ m/s}}
 \end{aligned}$$

Les invariants de Galilée

Un invariant est une mesure dont la valeur numérique est identique pour deux référentiels. Cela signifie que si l'on mesure deux événements dans un référentiel inertiel **A** et que l'on applique la **transformation de Galilée** pour transformer les mesures des deux événements vers un autre référentiel **B**, calculer l'expression de l'invariant donnera la même valeur numérique pour le référentiel **A** et **B**.

Voici quelques invariants selon la transformation de Galilée :

Le module de la vitesse relative entre les référentielles A et B	$ v_{xAB} = v_{xBA} $
La durée	$T_B = T_A$
La longueur	$L_B = L_A$
La composante selon l'axe x d'une force	$F_{xB} = F_{xA}$

Preuve :

- $v_{xAB} = -v_{xBA} \Rightarrow |v_{xAB}| = |-v_{xBA}|$ (Mettre valeur absolue)

 $\Rightarrow |v_{xAB}| = |v_{xBA}| \blacksquare$ (Simplifier)

- $T_B = t_{B2} - t_{B1} \Rightarrow T_B = (t_{A2}) - (t_{A1})$ (Utiliser $t_B = t_A$)

 $\Rightarrow T_B = T_A \blacksquare$ (Remplacer T_A)

- $L_B = x_{B2} - x_{B1} \Rightarrow L_B = (x_{A2} + v_{xAB}t_{A2}) - (x_{A1} + v_{xAB}t_{A1})$ (Utiliser $x_B = x_A + u_{xAB}t_A$)

 $\Rightarrow L_B = (x_{A2} - x_{A1}) + v_{xAB}(t_{A2} - t_{A1})$ (Factoriser u_{xAB})

 $\Rightarrow L_B = D_A + v_{xAB}T_A$ (Remplacer D_A et T_A)

 $\Rightarrow L_B = (L_A) + v_{xAB}(0)$ ($T_A = T_B = 0$, car longueur)

 $\Rightarrow L_B = L_A \blacksquare$ (Simplifier)

- $F_{xB} = ma_{xB} \Rightarrow F_{xB} = m \frac{dv_{xB}}{dt_B}$ (Remplacer $a_{xB} = dv_{xB} / dt_B$)

 $\Rightarrow F_{xB} = m \frac{d}{dt_A} (v_{xA} + v_{xAB})$ (Remplacer v_{xB} et $t_B = t_A$)

 $\Rightarrow F_{xB} = m \left(\frac{dv_{xA}}{dt_A} + \frac{dv_{xAB}}{dt_A} \right)$ (Distribuer la dérivée)

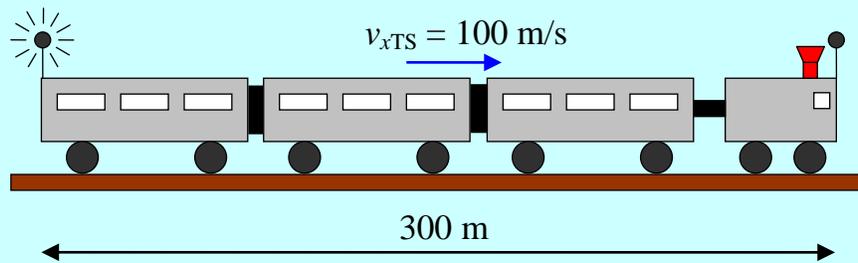
 $\Rightarrow F_{xB} = ma_{xA}$ (v_{xAB} est constant)

 $\Rightarrow F_{xB} = F_{xA} \blacksquare$ (2^{ème} loi de Newton)

La causalité et la transformation de Galilée

La transformation de Galilée permet une propagation de la causalité à des vitesses qui dépendent du choix du référentiel. Selon la transformation de Galilée, les longueurs et les durées sont mesurées avec des valeurs identiques dans tous les référentiels (invariantes sous une transformation de Galilée). Ainsi, la vitesse d'un signal dépend du choix de l'observateur.

Situation C : Le signal radio. Un train super rapide (référentiel **T**) de 300 m de longueur se déplaçant à 100 m/s par rapport au sol (référentiel **S**) possède deux antennes radio à ses deux extrémités. L'antenne arrière émet le signal radio à 3×10^8 m/s (par rapport à l'antenne) et l'antenne avant reçoit le signal. On désire évaluer la vitesse du signal radio par rapport au sol sans utiliser la transformation des vitesses de Galilée.



Évaluons le temps de voyage du signal radio selon le référentiel du train **T** :

$$\Delta x_T = v \Delta t_T \quad \Rightarrow \quad (300) = (3 \times 10^8) \Delta t_T \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_T = 1 \mu\text{s}}$$

Évaluons la position où sera capté le signal radio par rapport au sol **S** à partir de la transformation de Galilée de la position :

$$x_S = x_T + v_{xTS} t_T \quad \Rightarrow \quad x_S = (300) + (100)(1 \times 10^{-6}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_S = 300,0001 \text{ m}}$$

Évaluons la vitesse du signal radio par rapport au sol **S**. Il est important de rappeler que le temps de voyage du signal radio est le même dans les deux référentiels ($\Delta t_S = \Delta t_T$) selon la transformée de Galilée du temps :

$$\begin{aligned} \Delta x_S &= v \Delta t_S && \Rightarrow && (x_S) = v(\Delta t_T) && \text{(Remplacer } \Delta x_S = x_S, \Delta t_S = \Delta t_T) \\ &&& \Rightarrow && (300,0001) = v(1 \times 10^{-6}) && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &&& \Rightarrow && \boxed{v = 300\,000\,100 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer la vitesse du signal radio)} \end{aligned}$$

- ❖ La vitesse du signal radio par rapport au sol **S** respect la transformation des vitesses de Galilée ($v_{xS} = v_{xT} + v_{xTS}$ tel que $v_{xT} = 300\,000 \text{ m/s}$ et $v_{xTS} = 100 \text{ m/s}$).
- ❖ Nous réaliserons dans le **chapitre 4** que le **raisonnement** précédent basé sur les transformations de Galilée **ne s'applique pas** aux objets se déplaçant à **grande vitesse** comme la lumière. Ainsi, la transformation de Galilée n'est valide qu'à basse vitesse (approximation non-relativiste).

La relativité de Galilée

La relativité de Galilée peut être résumée par les affirmations suivantes :

Vitesse relative v_{xAB} du référentiel A par rapport au référentiel B	
Transformation de la position/déplacement selon l'axe x	$x_B = x_A + v_{xAB}t_A$ $\Delta x_B = \Delta x_A + v_{xAB} \Delta t_A$
Transformation de la position/déplacement selon l'axe y	$y_B = y_A$ $\Delta y_B = \Delta y_A$
Transformation du temps/durée	$t_B = t_A$ $\Delta t_B = \Delta t_A$
Transformation de la vitesse selon l'axe x	$v_{xB} = v_{xA} + v_{xAB}$
Transformation de la vitesse selon l'axe y	$v_{yB} = v_{yA}$
Les invariants entre le référentiel A et B	
Le module de la vitesse relative entre les référentielles A et B	$ v_{xAB} = v_{xBA} $
La longueur	$L_B = L_A$
La composante selon l'axe x d'une force	$F_{xB} = F_{xA}$
La composante selon l'axe y d'une force	$F_{yB} = F_{yA}$

