Chapitre 3.5b – Le critère de Rayleigh

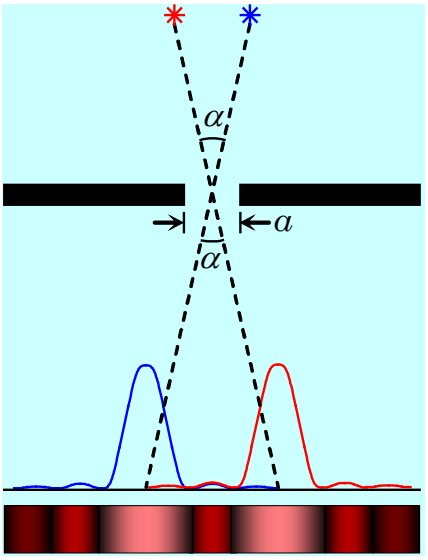
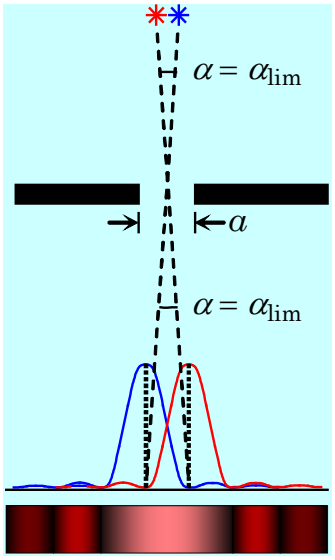
La limite de résolution

Lorsqu'on observe des objets situés à de très grandes distances, il n'est pas toujours évident d'en faire le dénombrement. Par exemple, on peut observer dans le ciel un point très lumineux et croire qu'on observe une étoile, mais qu'en réalité, le point lumineux est un système d'étoile double (voir schéma ci-contre).

Albireo est une constellation du Cygne composée de deux étoiles rapprochées.

La limite de résolution est un critère permettant d'affirmer si l'on observe un objet ou un groupe d'objets. Plusieurs objets seront alors discernables si la limite de résolution n'est pas atteinte. Plus les objets sont éloignés et près les uns des autres, plus la limite de résolution sera petite.

Utilisons la diffraction comme critère de limite de résolution :

Objets discernables	**Objets indiscernable**
Critère : Patrons de diffractions discernables (Nb de pics observés = nb objets)	Critère : Patrons de diffraction indiscernable (Nb de pics observés ≠ nb objets)
 Deux patrons de diffraction discernables.	 Deux patrons de diffraction indiscernables. Ils ne sont pas en interférence, car la lumière n'est pas cohérente (pas la même source).

Au **cas limite**, le **maximum central** du chaque patron de diffraction **coïncide** avec le **1^ier^ minimum** de **l'autre patron de diffraction**. Utilisons la position du 1^ier^ minimum afin d'évaluer notre angle critique α :

$$\delta = r_2 - r_1 \quad \Rightarrow \quad \delta = a\sin(\alpha) \quad (\text{Approximation : } a << L \text{ donc } r_2 - r_1 \approx a\sin(\alpha))$$

$$\Rightarrow \quad \delta = a\alpha \quad (\text{Approximation : } \alpha << 1 \text{ donc } \sin(\alpha) \approx \alpha)$$

Évaluons la position du 1ier minimums dans le patron de diffraction :

$\delta = m\lambda \quad \Rightarrow \quad (a\alpha) = m\lambda$ (Remplacer $\delta = a\alpha$)

$\Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{m\lambda}{a}$ (Isoler α)

$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \dfrac{\lambda}{a}}$ (1^{ier} minimum, $m = 1$)

Critère de Rayleigh

Après plusieurs travaux portant sur une approche mathématique de l'optique, le physicien anglais John William Strutt plus connu sous le nom de Lord Rayleigh (titre associé à la succession de son père mort en 1871) analyse la notion de la diffraction de la lumière. Il introduit la notion de limite de résolution en appliquant la théorie de la diffraction dans l'observation d'objets très rapprochés. Cette limite de résolution porte maintenant le nom de **critère de Rayleigh** et permet d'évaluer si **deux objets** sont **discernables** ou pas en **vérifiant** si les **patrons de diffraction** des deux objets sont **discernables**. Lorsque l'ouverture est rectiligne, le critère de Rayleigh correspond à la démonstration précédente : $\alpha = \lambda / a$.

Lord Rayleigh
(1842-1919)

Il est important de préciser que la forme de l'ouverture influence l'expression du critère de Rayleigh. Puisque plusieurs observations s'effectuent à l'aide de microscopes ou de télescopes à ouverture circulaire comme le télescope Hubble[1], il sera pratique d'avoir une version modifiée de notre résultat précédent, car il a été démontré pour les ouvertures rectilignes.

Le lancement du télescope Hubble fut réalisé le 24 avril 1990.

Ouverture rectiligne	Ouverture circulaire
$\alpha_{\text{lim}} = \dfrac{\lambda}{a}$	$\alpha_{\text{lim}} = 1{,}22\dfrac{\lambda}{D}$

où α_{lim} : Séparation angulaire limite (rad) $\quad (\alpha_{\text{lim}} << 1,\ \tan(\alpha_{\text{lim}}) \approx \alpha_{\text{lim}})$

λ : Longueur d'onde de la lumière (m)

a : Largeur de la fente rectiligne (m)

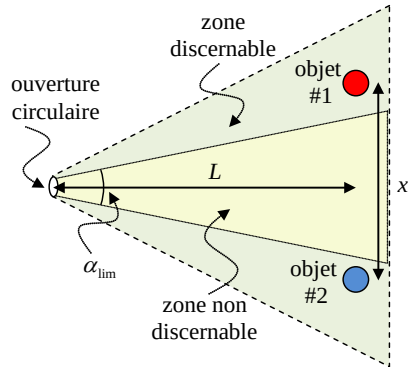
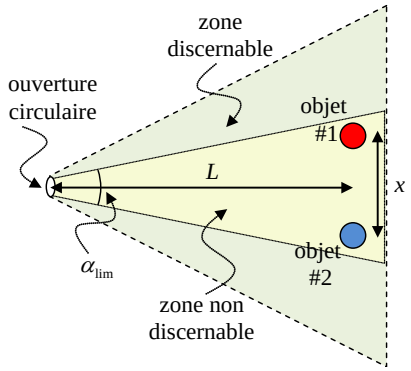
D : Diamètre de la fente circulaire (m)

[1] L'image ci-contre : télescope Hubble (Masse : 11 tonnes, Longueur : 13,2 m, Diamètre : 4,2 m, Lentille : 2,4 m de diamètre, Coût : 2 G$)

Deux objets discernables par critère de Rayleigh

Afin de déterminer si deux objets séparés par une distance x et éloignés d'un dispositif optique (œil, télescope) à une distance L son discernable par le critère de Rayleigh, nous devons vérifier si l'angle de séparation θ des deux objets est supérieur à l'angle limite α_{lim}.

Sans approximation	Avec approximation des petits angles ($L >> x$)
$\tan(\theta/2) = \dfrac{x/2}{L}$	$\tan(\theta) \approx \dfrac{x}{L}$

Cas de deux objets discernables ($\theta > \alpha_{\text{lim}}$)	Cas de deux objets non discernables ($\theta < \alpha_{\text{lim}}$)
	

Situation 3 : ***La limite de résolution de l'œil.*** La pupille de l'œil a un diamètre de 5 mm. On désire déterminer **(a)** la limite de résolution de l'œil pour une longueur d'onde située au milieu du spectre visible ($\lambda = 550$ nm, ce qui correspond a une teinte de vert) et **(b)** quelle est la distance minimale entre deux objets pouvant être distingués à 10 m de l'œil.

Puisqu'une pupille est une ouverture circulaire, utilisons le critère de Rayleigh afin d'évaluer la limite de résolution de l'œil :

$$\alpha_{\text{lim}} = 1{,}22\frac{\lambda}{D} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\text{lim}} = 1{,}22\frac{\left(550\times10^{-9}\right)}{\left(5\times10^{-3}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{\text{lim}} = 1{,}342\times10^{-4}\ \text{rad}} \qquad \textbf{(a)}$$

Calculons la distance limite entre deux objets situés à 10 m d'un œil humain en utilisant l'approximation des petits angles, car $L >> x_{\text{lim}}$:

$$\tan(\alpha_{\text{lim}}) = \frac{x_{\text{lim}}}{L} \quad \Rightarrow \quad \tan\left(1{,}342\times10^{-4}\right) = \frac{x_{\text{lim}}}{(10)}$$

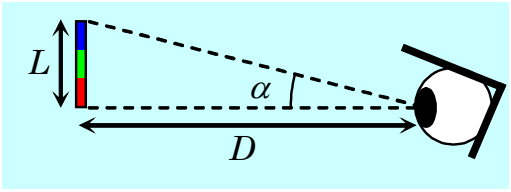
$$\Rightarrow \quad \boxed{x_{\text{lim}} = 1{,}3\ \text{mm}} \qquad \textbf{(b)}$$

Situation 4 : ***La distance optimale pour une télévision à grand écran.*** La largeur d'une image DVD correspond à 940 pixels. On la projette sur un écran de 42 pouces de diagonale (1 pouce = 2,54 cm), ce qui correspond à une largeur de 93 cm. On désire déterminer à quelle distance de l'écran on doit se placer pour être tout juste incapable de distinguer les pixels. On suppose que l'œil a une limite de résolution de 1'.

Degré et minute	Minute et seconde	Degré et seconde
1° = 60'	1'= 60''	1° = 3600''

Évaluons la distance entre deux pixels :

$$L = \frac{l\,\text{arg}\,eur}{nb_{pixel}} = \frac{(0{,}93)}{(940)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = 9{,}89\times10^{-4}\,\text{m}}$$



Évaluons notre limite de résolution en radian :

$$\alpha_{\text{lim}} = 1'\times\frac{1°}{60'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{\text{lim}} = 0{,}0167°}$$

Évaluons la distance limite entre l'œil et le pixel :

$$\tan(\alpha_{\text{lim}}) = \frac{L}{D} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{L}{\tan(\alpha_{\text{lim}})}$$

$$\Rightarrow \quad D = \frac{(9{,}89\times10^{-4})}{\tan(0{,}0167)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D = 3{,}39\ \text{m}}$$

Le critère de Rayleigh et l'expérience de Young

Lors de l'expérience de Young, nous avons utilisé deux sources de lumière cohérentes séparées par une très petite distance *d* ce qui a permis de superposer les deux patrons de diffraction sans pouvoir les distinguer. Puisque la lumière était en plus cohérente, les deux patrons de diffraction ont pu également interférer ensemble ce qui a donné des maximums et minimum lumineux à l'intérieur du patron de diffraction.

Deux patrons de diffraction indiscernables sans interférence	Deux patrons de diffraction indiscernable avec interférence
En construction …	En construction …