# Chapitre 2.7 – La formule des opticiens

## La vergence

La vergence est l'aptitude d'une lentille à faire dévier un faisceau de lumière issue d'un objet (réel ou virtuelle) permettant la formation d'une image nette (réelle ou virtuelle). Elle sera **positive** si le faisceau converge davantage et sera **négative** si le faisceau diverge davantage. On peut associer la vergence à une distance portant le nom de **distance focale** uniquement pour une lentille mince[1] *entourée d'air* ($n_1 = n_2 = 1$).

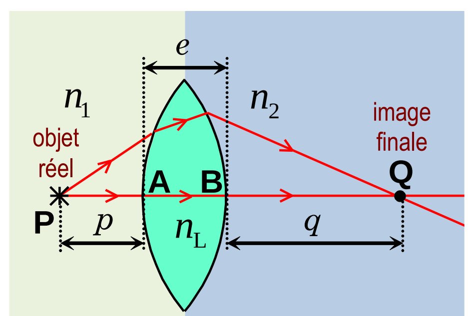
Dans un cas plus général, on peut associer la position $p$ d'un objet avec la formation d'une image en position $q$ grâce à la vergence $V$ d'une lentille mince entouré de deux milieux $n_1$ et $n_2$ grâce à l'équation

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V \qquad \text{et} \qquad \frac{y_\mathrm{i}}{y_\mathrm{o}} = -\frac{n_1}{n_2}\frac{q}{p}$$

où
- $V$ : La vergence de la lentille mince en dioptries ($\mathrm{D}$).
- $n_1$ : Indice du milieu incident à la lentille.
- $n_2$ : Indice du milieu à la sortie de la lentille.
- $p$ : Position de l'objet par rapport à la lentille (position de l'objet le long de l'axe optique) (m).
- $q$ : Position de l'image par rapport à la lentille (position de l'image le long de l'axe optique) (m).
- $y_\mathrm{o}$ : Distance entre l'objet et l'axe optique (m).
- $y_\mathrm{i}$ : Distance entre l'image de l'axe optique (m).

## Le calcul de la vergence d'une lentille mince

La vergence d'une lentille plongée dans un milieu $n_1$ et $n_2$ peut être déterminée[2] par les deux courbures $R_\mathrm{A}$ et $R_\mathrm{B}$ de la lentille grâce à l'équation suivante :




$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V \qquad \text{avec} \qquad V = \frac{n_\mathrm{L} - n_1}{R_\mathrm{A}} - \frac{n_\mathrm{L} - n_2}{R_\mathrm{B}}$$

où
- $V$ : La vergence de la lentille mince ($\mathrm{m}^{-1}$).
- $n_1$ : Indice du milieu incident.
- $n_2$ : Indice du milieu transmis.
- $n_\mathrm{L}$ : Indice de réfraction de la lentille.
- $R_\mathrm{A}$ : Rayon de courbure du côté A (m).
- $R_\mathrm{B}$ : Rayon de courbure du côté B (m).

Convention :

$R > 0$ : Courbure convexe au passage de la lumière.

$R < 0$ : Courbure concave au passage de la lumière.

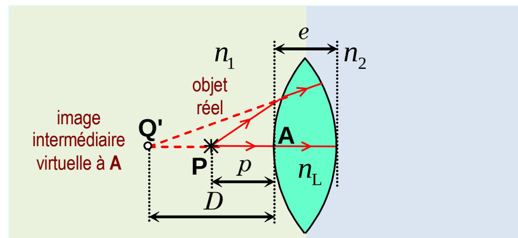
[1] Ce sujet est traité dans la section 2.6 - Les lentilles minces.
[2] Cette démonstration est disponible dans le livre de référence à la section 2.10 - La vergence des lentilles.

Preuve :

À partir de la position d'un objet $p$ et de la position de son image $q$ après deux déviations sur deux dioptres d'une lentille de largeur $e$ plongé dans deux milieux d'indice de réfraction $n_1$ et $n_2$, évaluons la vergence $V$ de la lentille en fonction des rayons de courbure $R_A$ et $R_B$ de la lentille afin de satisfaire la relation

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V \quad .$$

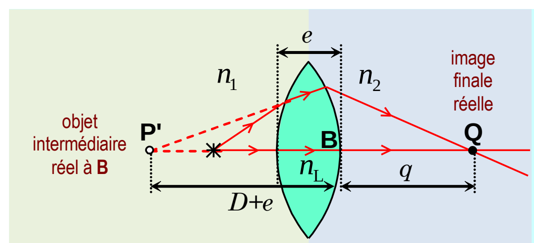
Évaluons l'expression de la déviation #1 des rayons provenant de l'objet réel en position **P** sur le dioptre **A**. Cela va produire une image intermédiaire en position **Q'**:




$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{p} + \frac{(n_L)}{q} = \frac{(n_L) - n_1}{(R_A)}$$ (Indice réfraction et $R = R_A$)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_L}{\mp D} = \frac{n_L - n_1}{R_A}} \quad \textbf{(1)}$$ (Si l'image est virtuelle, $q = -D$)

Évaluons l'expression de la déviation #2 des rayons provenant de l'objet intermédiaire **P'** sur le dioptre **B**. Cela va produit l'image finale en position **Q** :




$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{(n_L)}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - (n_L)}{(R_B)}$$ (Indice réfraction et $R = R_B$)

$$\Rightarrow \quad \frac{n_L}{\pm(D \pm e)} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_L}{R_B}$$ (Si l'objet inter. est réel, $p = D + e$)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{n_L}{\pm D} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_L}{R_B}} \quad \textbf{(2)}$$ (Appro. lentille mince, $e \approx 0$)

Additionnons nos deux équations **(1)** et **(2)** afin de reformer l'équation des lentilles minces :

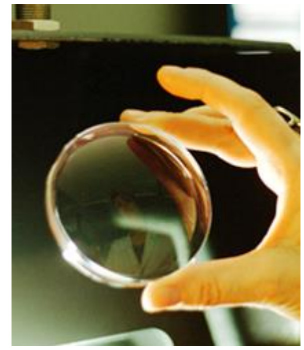
**(1)** + **(2)** $$\Rightarrow \quad \left[\frac{n_1}{p} + \frac{n_L}{\mp D}\right] + \left[\frac{n_L}{\pm D} + \frac{n_2}{q}\right] = \left[\frac{n_L - n_1}{R_A}\right] + \left[\frac{n_2 - n_L}{R_B}\right]$$ (Additionner **(1)** + **(2)**)

$$\Rightarrow \quad \frac{n_1}{p} + \frac{n_L}{\mp D} + \left(-\frac{n_L}{\mp D}\right) + \frac{n_2}{q} = \frac{n_L - n_1}{R_A} + \left(-\frac{n_L - n_2}{R_B}\right)$$ (Factoriser négatif)

$$\Rightarrow \quad \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V \quad \text{où} \quad V = \frac{n_L - n_1}{R_A} - \frac{n_L - n_2}{R_B} \quad \blacksquare$$ (Simplifier)

# La formule des opticiens

La formule des opticiens est une formule permettant d'évaluer la vergence la d'une lentille mince *entourée d'air* en fonction de l'indice de réfraction du verre $n_L$ et des deux rayons de courbure de la lentille $R_A$ et $R_B$. L'application de cette équation est strictement réservée aux lentilles de grand rayon de courbure pour respecter l'approximation des rayons paraxiaux. De plus, le calcul de la vergence du verre par cette formule permet de définir la distance focale *f* de la lentille mince :

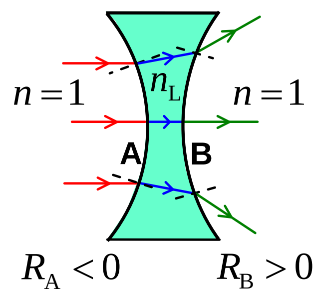


Verre correcteur prêt à être taillé.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=V \quad \text{avec} \quad V=(n_L-1)\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right) \quad \text{et} \quad f=\frac{1}{V}$$

où
- $f$ : Distance focale de la lentille mince (m)
- $V$ : Vergence de la lentille mince ($\mathrm{m}^{-1}$)
- $n_L$ : Indice de réfraction de la lentille
- $R_A$ : Rayon de courbure du côté A (m)
- $R_B$ : Rayon de courbure du côté B (m)

<u>Exemple :</u> Lentille divergente




<u>Convention :</u>

- $R>0$ : Courbure convexe au passage de la lumière.
- $R<0$ : Courbure concave au passage de la lumière.

<u>Preuve :</u>

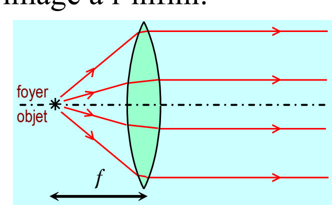
À partir de la formule de la vergence d'une lentille mince, remplaçons les indices de réfraction $n_1$ et $n_2$ par l'indice de l'air et réécrivons l'équation :

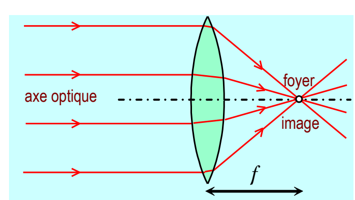
- $\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{q}=V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=V$ ■ (1)
- $V=\frac{n_L-n_1}{R_A}-\frac{n_L-n_2}{R_B} \quad \Rightarrow \quad V=\frac{n_L-(1)}{R_A}-\frac{n_L-(1)}{R_B}$

$$\Rightarrow \quad V=(n_L-1)\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$ ■ (2)

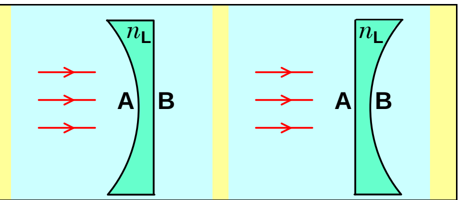
<u>Remarque :</u>

La distance focale permet d'identifier la position du foyer de la lentille ce qui permet d'établir un lien entre un objet à l'infini et la formation d'une image sur le foyer et la position d'un objet sur le foyer et la formation d'une image à l'infini.



**Situation 1 : *Une lentille plan-concave.*** On désire construire une lentille mince plan-concave en verre ($n$ = 1,5 ) qui possède une distance focale de -20 cm lorsqu'elle est entourée d'air. On désire déterminer le rayon de courbure de la face concave.




Appliquons la formule des opticiens afin d'isoler le rayon de courbure de la lentille plan-concave. Prenons le côté concave comme face incidente aux rayons :

$$\frac{1}{f} = (n_L - 1)\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = (n_L - 1)\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{(\infty)}\right) \qquad \text{(Remplacer } R_B = \infty\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f} = (n_L - 1)\frac{1}{R_A} \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad R_A = (n_L - 1) f \qquad \text{(Isoler } R_A\text{)}$$

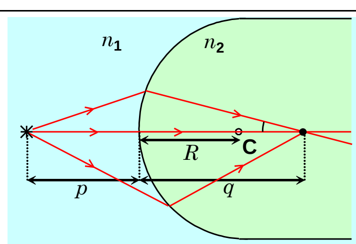
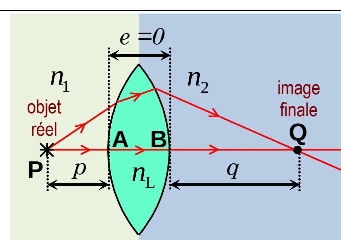
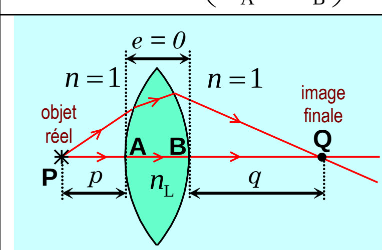
$$\Rightarrow \quad R_A = ((1{,}5) - 1)(-0{,}20) \qquad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_A = -0{,}10 \text{ m}} \qquad \text{(Évaluer } R_A\text{)}$$

On peut remarquer que le sens de la lentille n'affecte pas la distance focale résultante de la lentille. Les règles de signe associées aux rayons de courbure permettent à la formule des opticiens d'être symétrique.

## En résumé

Sous l'approximation des rayons paraxiaux, pour faire le positionnement $q$ d'une image dans le milieu $n_2$ à partir du positionnement $p$ d'un objet dans le milieu $n_1$, il suffit de préciser la vergence $V$ du système de dioptres en jeu.

| Système de dioptres | Un dioptre | Lentille mince dans deux milieux différents | Lentille mince dans l'air |
|---|---|---|---|
| Équations à utiliser | $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V$ et $\frac{y_i}{y_o} = -\frac{n_1}{n_2}\frac{q}{p}$ | $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = V$ et $\frac{y_i}{y_o} = -\frac{n_1}{n_2}\frac{q}{p}$ | $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = V$ et $\frac{y_i}{y_o} = -\frac{q}{p}$ |
| La vergence | $V = \frac{n_2 - n_1}{R}$ | $V = \frac{n_L - n_1}{R_A} - \frac{n_L - n_2}{R_B}$ | $V = (n_L - 1)\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$ |
| Schéma |   |   |   |

## La somme des vergences

Lorsque deux lentilles ou plus d'épaisseur négligeable sont collées (sans milieu entre les lentilles), la vergence totale du système de lentilles sous l'approximation des rayons paraxiaux est égale à l'expression suivante :

$$V_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} V_i$$

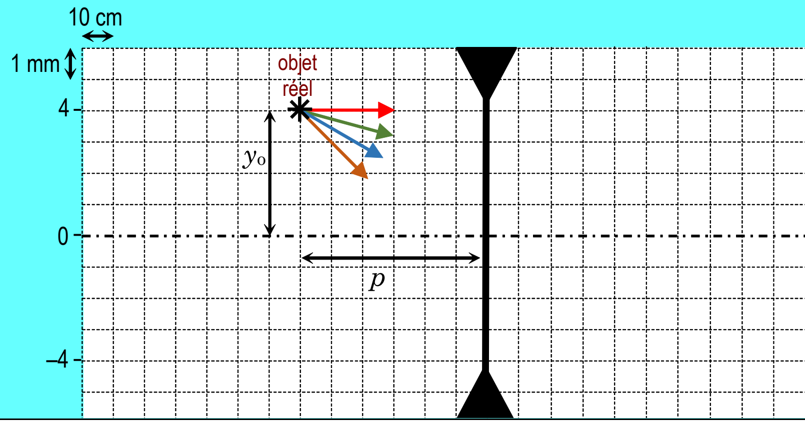
(sous approximation paraxiaux, lentilles collées)

où $V_{\text{tot}}$ : Vergence totale du système de lentille (D).
$V_i$ : Vergence de la lentille $i$ (D).
$N$ : Nombre de lentille dans le système.

<u>Preuve :</u>

En construction …

**Situation A :** ***Le faisceau de l'objet réel dévié par une lentille biconcave*****.** Un objet ponctuel est situé devant une lentille biconcave de 40 cm de rayon en verre ($n$ = 1,5) à une distance $p$ = 60 cm et une hauteur $y_o$ = 4 mm de l'axe optique. On désire **(a)** évaluer la position $q$ et $y_i$ de l'image et **(b)** compléter le faisceau de lumière illustré sur le schéma ci-dessous.




Évaluons la vergence de la lentille biconcave :

$$V = (n_L - 1)\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right) \quad \Rightarrow \quad V = (n_L - 1)\left(\frac{1}{(-R)} - \frac{1}{(+R)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad V = -2\frac{(n_L - 1)}{R}$$

$$\Rightarrow \quad V = -2\frac{((1,5) - 1)}{(0,40\,\text{m})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V = -2,5 \ \text{D}}$$

Évaluons la position $q$ de l'image :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=V$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(0,6\,\mathrm{m})}+\frac{1}{q}=(-2,5\,\mathrm{D})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q=-0,24\,\mathrm{m}}$$

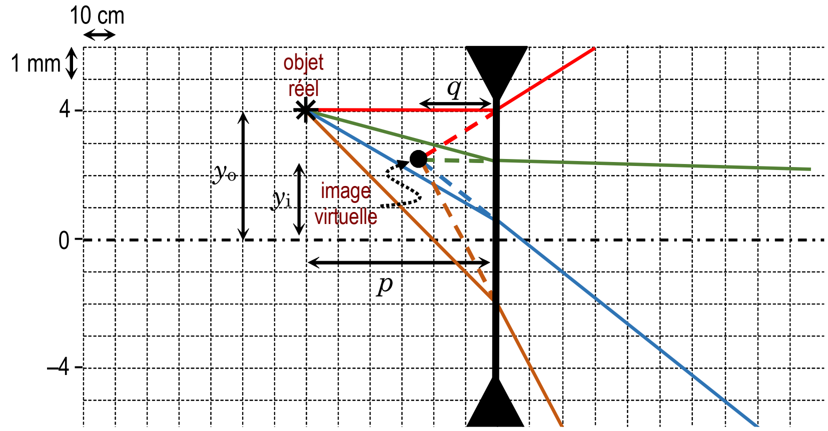
Évaluons la position $y_0$ de l'image :

$$\frac{y_{\mathrm{i}}}{y_{\mathrm{o}}}=-\frac{q}{p}$$

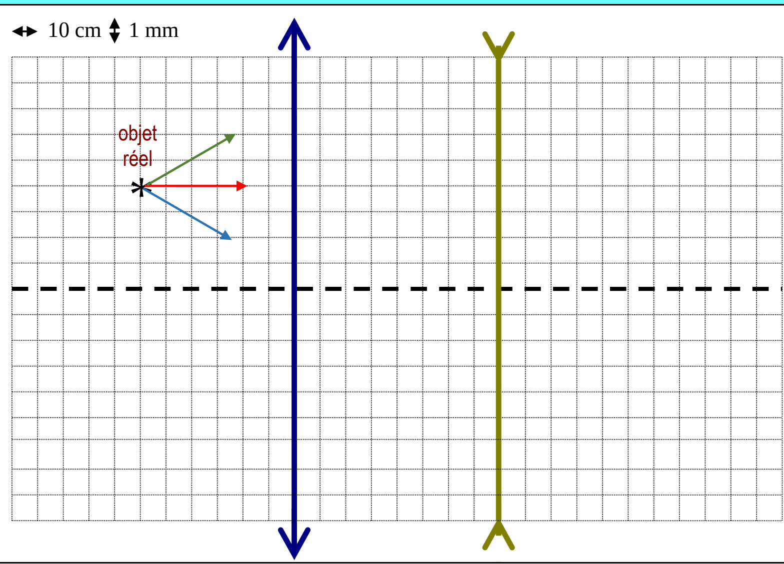
$$\Rightarrow \quad \frac{y_{\mathrm{i}}}{(4\,\mathrm{mm})}=-\frac{(-0,24\,\mathrm{m})}{(0,40\,\mathrm{m})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_{\mathrm{i}}=2,4\ \mathrm{mm}}$$

Schéma du faisceau de lumière :




**Situation B :** ***Le faisceau de l'objet réel dévié par deux lentilles.*** Un objet ponctuel est situé devant une lentille de +2,5 D à une distance $p$ = 60 cm et une hauteur $y_{\mathrm{o}}$ = 4 mm de l'axe optique. Une seconde lentille de -5 D est situé à une distance d = 80 cm derrière la première lentille. On désire **(a)** évaluer la position $q$ et $y_{\mathrm{i}}$ de l'image et **(b)** compléter le faisceau de lumière illustré sur le schéma ci-dessous.



Évaluons la position $q_1$ de l'image associée à la 1re lentille :

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=V_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(0,6\,\text{m})}+\frac{1}{q_1}=(2,5\,\text{D})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q_1=1,20\ \text{m}}$$

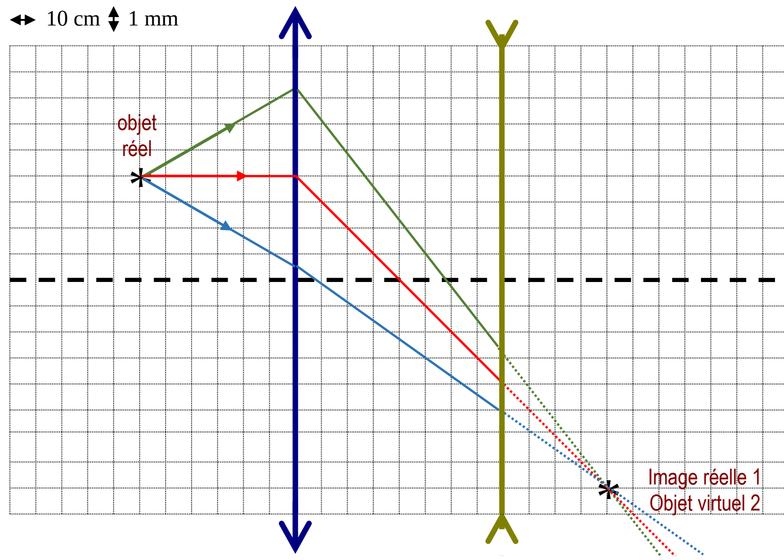
Évaluons la position $y_{i1}$ de l'image associée à la 1re lentille :

$$\frac{y_{i1}}{y_{o1}}=-\frac{q_1}{p_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_{i1}}{(4\,\text{mm})}=-\frac{(1,20\,\text{m})}{(0,60\,\text{m})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_i=-8\ \text{mm}}$$

<u>Schéma du faisceau de lumière après la 1re déviation :</u>




Évaluons la position de l'objet $p_2$ associée à la 2e lentille à partir de l'image $q_1$ et la distance $d$ :

$$p_2=d-q_1 \quad \Rightarrow \quad p_2=(0,80\,\text{m})-(1,20\,\text{m}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_2=-0,40\ \text{m}}$$

Évaluons la position $q_2$ de l'image associée à la 2e lentille :

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=V_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(-0,4\,\text{m})}+\frac{1}{q_2}=(-5\,\text{D})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q_2=-0,40\ \text{m}}$$

Évaluons la position $y_{i2}$ de l'image associée à la 2e lentille :

$$\frac{y_{i2}}{y_{o2}}=-\frac{q_2}{p_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_{i1}}{(-8\,\text{mm})}=-\frac{(-0,40\,\text{m})}{(-0,40\,\text{m})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_i=8\ \text{mm}}$$

<u>Schéma du faisceau de lumière après la 2e déviation :</u>