

Chapitre 2.5a – Les dioptries sphériques

La courbure des dioptries sphériques

Un dioptrie sphérique est une interface de forme sphérique de rayon de courbure R permettant à la lumière d'être réfracté d'un milieu à un autre. Le signe du rayon de courbure du dioptrie est interprété par le faisceau incident au dioptrie :

Faisceau	Dioptrie convexe d'après le faisceau ($R > 0$) (positif)	Dioptrie concave d'après le faisceau ($R < 0$) (négatif)
Faisceau divergent (objet réel)		
Faisceau convergent (objet virtuel)		

Remarque : Cette convention de signe est l'inverse de celle des miroirs sphériques puisque le calcul qui sera effectué sera de la réfraction étant l'inverse de la réflexion.

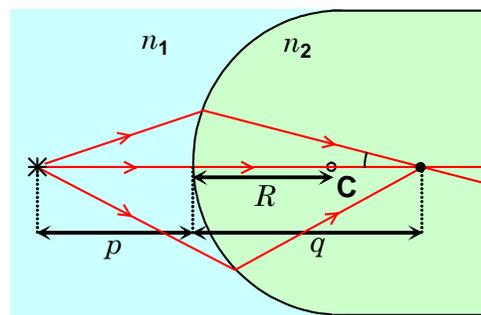
L'équation du dioptrie sphérique

La position d'une image q nette associée à la position d'un objet p devant un dioptrie sphérique dépend du rayon de courbure R lorsque l'on applique la **contrainte des rayons paraxiaux** et des indices de réfractations n_1 et n_2 du milieu formant le dioptrie :

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \text{et} \quad \frac{y_i}{y_o} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{q}{p}$$

où

- p : Distance entre l'objet et le miroir (m)
- q : Distance entre l'image et le miroir (m)
- R : Rayon de courbure du miroir (m)
- n_1 : Indice de réfraction du milieu incident
- n_2 : Indice de réfraction du milieu réfracté



Exemple avec objet et image réelle.

Convention :

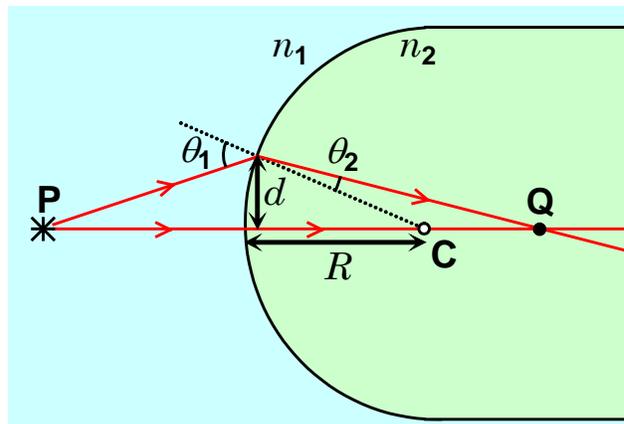
- $R > 0$: dioptrie convexe
- $R < 0$: dioptrie concave
- $p > 0$: objet réel
- $p < 0$: objet virtuel
- $q > 0$: image réelle
- $q < 0$: image virtuelle

Preuve :

Considérons un objet réel sur l'axe central d'un dioptré sphérique. Analysons la réfraction d'un rayon voyageant le long de l'axe central et un rayon quelconque tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.

Le premier rayon arrivant sur l'interface avec un angle incident de 0° ne subit pas de déviation lors de sa réfraction. Le second rayon sera dévié selon la loi de la réfraction

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) .$$



Appliquons l'approximation des rayons paraxiaux sous la condition $d \ll R$ ce qui réduit l'expression de la loi de la réfraction à

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$$

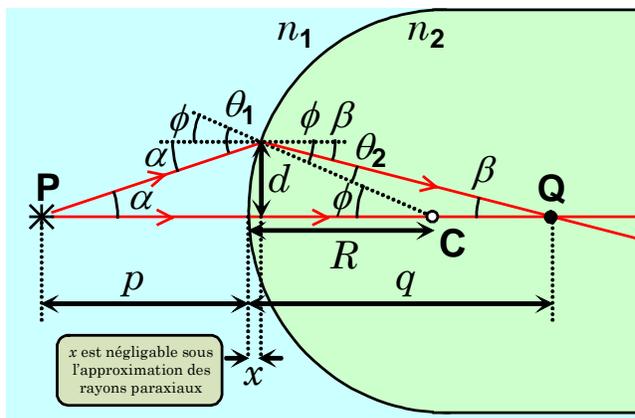
(approximation des rayons paraxiaux et angle en radian)

puisque $\theta \ll 1$ rad . Ceci se justifie puisque

$$\theta \ll 1 \text{ rad} \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \approx \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) \approx \theta .$$

En exploitant la distance p entre la position de l'objet le dioptré, la distance q entre la position de l'image et le dioptré et le rayon de courbure R du dioptré, nous pouvons établir les relations suivantes en lien avec le second rayon en exploitant l'approximation des petits angles et le fait que $x \ll 1$:

- $\tan(\alpha) = \frac{d}{p} \Rightarrow \alpha \approx \frac{d}{p}$
- $\tan(\beta) = \frac{d}{q} \Rightarrow \beta \approx \frac{d}{q}$
- $\tan(\phi) = \frac{d}{R} \Rightarrow \phi \approx \frac{d}{R}$



Développons la loi de la réfraction sous l'approximation des rayons paraxiaux afin d'établir la relation désirée :

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2 \Rightarrow n_1 (\phi + \alpha) = n_2 (\phi - \beta) \quad (\theta_1 = \phi + \alpha \text{ et } \theta_2 = \phi - \beta)$$

$$\Rightarrow n_1 \left(\frac{d}{R} + \frac{d}{p} \right) = n_2 \left(\frac{d}{R} - \frac{d}{q} \right) \quad (\text{Remplacer } \alpha, \beta \text{ et } \phi)$$

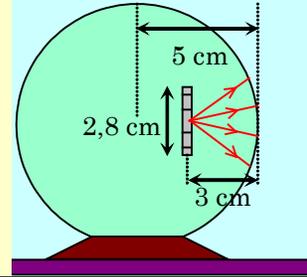
$$\Rightarrow \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \blacksquare (1) \quad (\text{Simplifier } d \text{ et réorganiser l'équation})$$

La preuve de l'équation

$$\frac{y_i}{y_o} = -\frac{n_1 q}{n_2 p}$$

est présentement en construction.

Situation 1 : Un presse-papier en verre. Une pièce de monnaie de 2\$, dont le diamètre est égal à 2,8 cm, se trouve à 3 cm de la paroi d'un presse-papier sphérique en verre ($n = 1,5$) de 5 cm de rayon. On désire déterminer le diamètre de l'image de la pièce pour un observateur qui la regarde à travers l'épaisseur minimale de verre. (On utilise l'approximation des rayons paraxiaux.)



Du point de vue du faisceau divergent généré par la pièce de monnaie étant l'objet réel, nous avons un **dioptre concave** avec les indices de réfraction suivants à l'interface :

$$R = -5 \text{ cm}$$

(dioptre concave)

$$n_1 = 1,5$$

(verre)

$$n_2 = 1$$

(air)

Évaluons la position de l'image après une réfraction du verre à l'air :

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \Rightarrow \frac{(1,5)}{p} + \frac{(1)}{q} = \frac{(1) - (1,5)}{R} \quad (n_1 = 1,5 \text{ et } n_2 = 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1,5}{p} + \frac{1}{q} = \frac{-0,5}{(-5 \text{ cm})} \quad (R = -5 \text{ cm, dioptre concave})$$

$$\Rightarrow \frac{1,5}{(3 \text{ cm})} + \frac{1}{q} = \frac{-0,5}{(-5 \text{ cm})} \quad (p = 3 \text{ cm, objet réel})$$

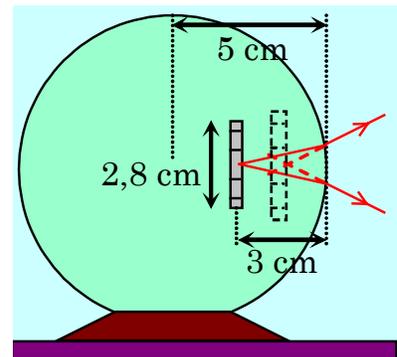
$$\Rightarrow \boxed{q = -2,5 \text{ cm}} \quad (\text{Évaluer } q, \text{ image virtuelle car } q < 0)$$

Puisque l'image est virtuelle et que nous sommes dans l'analyse d'une réfraction, l'image se formera dans le milieu incident (du « mauvais côté » de la transmission).

Évaluons la taille de l'image virtuelle finale :

$$\frac{y_i}{y_o} = -\frac{n_1 q}{n_2 p} \Rightarrow \frac{y_i}{(2,8 \text{ cm})} = -\frac{(1,5)(-2,5 \text{ cm})}{(1)(3 \text{ cm})}$$

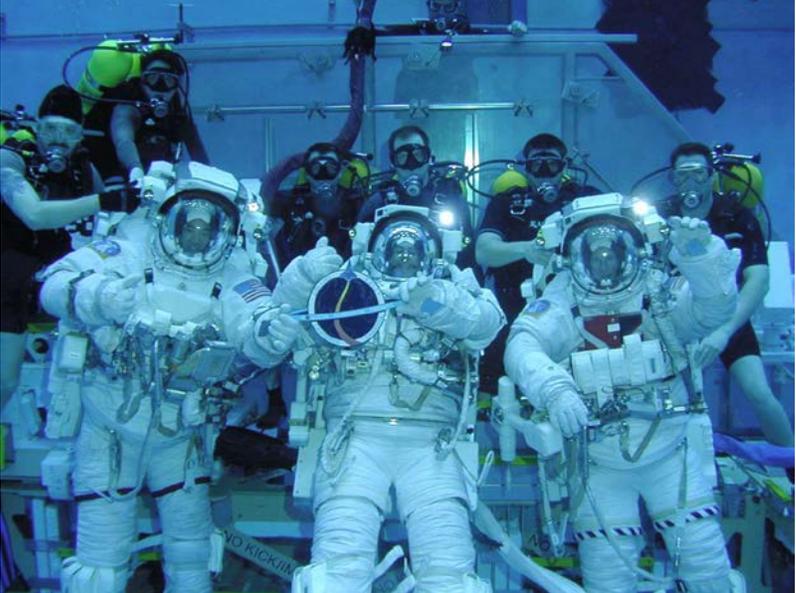
$$\Rightarrow \boxed{y_i = 3,5 \text{ cm}}$$



Un observateur va voir l'image de la pièce dans le presse-papier et plus grande qu'elle ne l'est en réalité.

L'effet *fishbowl*

Lorsque l'on observe un objet dans un contenant transparent contenant une substance dont l'indice de réfraction est différent de l'air, la forme du contenant influencera la réfraction de la lumière donnant place à une illusion d'optique portant le nom de l'effet *fishbowl*.

Agrandissement de l'image virtuelle	Rétrécissement de l'image virtuelle
 <p data-bbox="203 1060 584 1102">La lumière passant de l'eau à l'air forme une image plus grande que l'objet.</p>	 <p data-bbox="747 1060 1388 1102">La lumière passant de l'air à l'eau forme une image plus petite que l'objet.</p>

Exercice

Exercice A : La taille du moustique. Un moustique de l'ère jurassique a été découvert, fossilisé, dans un morceau d'ambre dont l'indice de réfraction est 1,6. La surface de l'ambre est sphérique et convexe, et son rayon de courbure est de 3,0 mm. La tête du moustique est située sur l'axe optique de cette surface et, lorsqu'on regarde le long de l'axe, elle semble être située à 5,0 mm à l'intérieur de l'ambre. Quelle est sa position réelle? (On utilise l'approximation des rayons paraxiaux.)



Solution

En construction ...

