Chapitre 2.4 – La réfraction

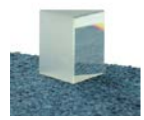
La vitesse de la lumière dans un milieu

La lumière voyage dans le vide à une vitesse $c = 3\times10^{8}\ \text{m/s}$. Lorsqu'elle voyage dans un milieu, la lumière se déplace à vitesse v égale à la vitesse dans le vide divisé par un facteur n portant le nom **d'indice de réfraction** :

$$v = \frac{c}{n}$$

où v : Vitesse de la lumière dans un milieu (m/s)
c : Vitesse de la lumière dans le vide, $c = 3\times10^{8}\ \text{m/s}$
n : Indice de réfraction du milieu

Voici une table d'indice de réfraction :

Air	Eau	Plexiglas	Verre crown	Diamant
				
n = 1,0003	n = 1,33	n = 1,49	n = 1,52	n = 2,42

La loi de la réfraction

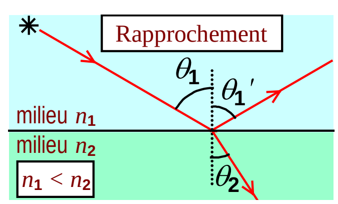
La **réfraction** est le phénomène qui permet à la lumière de passer d'un milieu à un autre ce qui occasionne une déviation. La **loi de la réfraction** établie un lien entre l'angle d'incidence θ_1 d'un rayon voyageant dans un milieu n_1 et l'angle de réfraction θ_2 du même rayon réfracté dans un milieu n_2. Les angles sont mesurés par rapport à la normale à la surface de l'interface (dioptre) délimitant les deux milieux. Cette relation fut établie par Willebord Snell et René Descartes au 17e siècle :

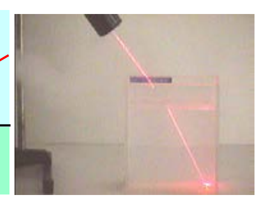
Willebord Snell
(1580-1626)

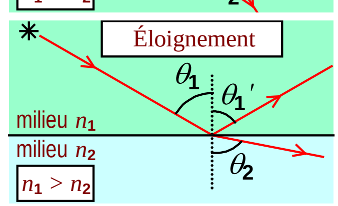
René Descartes
(1596-1650)

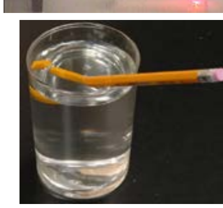
$$n_2 \sin(\theta_2) = n_1 \sin(\theta_1)$$

où n_2 : Indice de réfraction du milieu de réfraction
θ_2 : Angle de réfraction par rapport à la normale
n_1 : Indice de réfraction du milieu incident
θ_1 : Angle incident par rapport à la normale



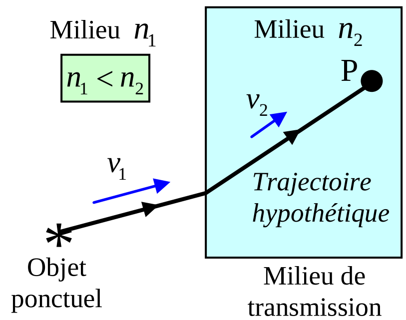






<u>Preuve :</u> (principe de Fermat)

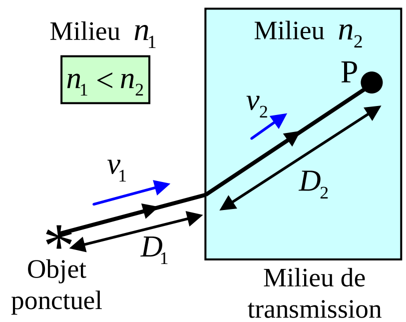
Considérons un objet ponctuel qui émet de la lumière dans toutes les directions. Étudions la trajectoire de la lumière qui est transmise via une interface plane (dioptre plan) d'un milieu d'indice de réfraction n_1 vers un milieu d'indice de réfraction n_2 et qui se dirige vers un point P. Considérons $n_1 < n_2$.



À partir du **principe de Fermat**, évaluons la **trajectoire** de la lumière qui **minimise** le **temps de parcours** t afin d'établir un lien entre l'angle d'incidence θ_1 et l'angle de réfraction θ_2.

Puisque la lumière ne voyage pas toujours dans le même milieu, elle ne se déplace pas toujours à la même vitesse. Utilisons l'indice de réfraction afin de définir la vitesse de la lumière dans un milieu d'indice n :

$$v = c / n$$



À partir des équations du MUA, nous pouvons déterminer une relation de temps de parcours t_1 et t_2 pour la lumière dans le milieu n_1 et dans le milieu de réfraction n_2 sachant que la **lumière voyage en ligne droite**. Le temps de parcours total t sera l'addition de ces deux temps :

$\Delta x = vt \quad \Rightarrow \quad$ Milieu n_1 : $\quad D_1 = v_1 t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = D_1 / v_1$

Milieu n_2 : $\quad D_2 = v_2 t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = D_2 / v_2$

Alors :

$$t = t_1 + t_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{D_1}{v_1} + \frac{D_2}{v_2}}$$

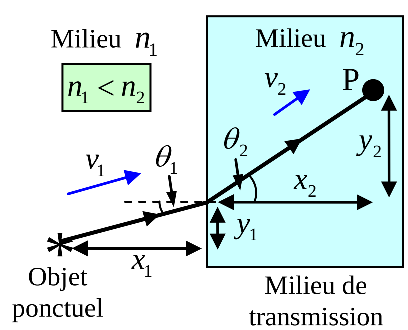
À partir du théorème de Pythagore, nous pouvons évaluer la distance D_1 à partir de x_1 et y_1 et la distance D_2 à partir de x_2 et y_2 :

$$D_1 = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$$

et

$$D_2 = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

<u>Important :</u> $y_1 + y_2 =$ constante



Dans le calcul du temps de parcours t, les variables sont y_1 et y_2 (distance verticale variable à parcourir verticalement dans chaque milieu) et les constantes sont x_1 et x_2 (distance horizontale obligatoire à parcourir dans chaque milieu).

Appliquons la **dérivée à l'équation du temps de parcours** t et égalisons la à **zéro** afin de trouver la **solution** qui **minimise le temps de parcours** :

$$\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{(Minimiser } t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\left(\frac{D_1}{v_1} + \frac{D_2}{v_2}\right) = 0 \qquad \text{(Remplacer } t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\left(\frac{D_1}{c/n_1} + \frac{D_2}{c/n_2}\right) = 0 \qquad \text{(Remplacer } v = c/n\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c}\mathrm{d}\left(n_1 D_1 + n_2 D_2\right) = 0 \qquad \text{(Simplifier et factoriser } 1/c\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\left(n_1 D_1 + n_2 D_2\right) = 0 \qquad \text{(Multiplier par } c\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y_1}\left(n_1 D_1 + n_2 D_2\right)\mathrm{d}y_1 + \frac{\partial}{\partial y_2}\left(n_1 D_1 + n_2 D_2\right)\mathrm{d}y_2 = 0 \qquad \text{(Différentiel : } \mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{\partial(n_1 D_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial(n_2 D_2)}{\partial y_1}\right]\mathrm{d}y_1 + \left[\frac{\partial(n_1 D_1)}{\partial y_2} + \frac{\partial(n_2 D_2)}{\partial y_2}\right]\mathrm{d}y_2 = 0 \qquad \text{(Distribuer la dérivée)}$$

$$\Rightarrow \quad \left[n_1\frac{\partial D_1}{\partial y_1} + n_2\frac{\partial D_2}{\partial y_1}\right]\mathrm{d}y_1 + \left[n_1\frac{\partial D_1}{\partial y_2} + n_2\frac{\partial D_2}{\partial y_2}\right]\mathrm{d}y_2 = 0 \qquad \text{(Factoriser constante } n\text{)}$$

Puisque la distance D_1 ne dépend pas de y_2, alors :

$$\frac{\partial D_1}{\partial y_2} = \frac{\partial\left(\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}\right)}{\partial y_2} = 0$$

Puisque la distance D_2 ne dépend pas de y_1, alors :

$$\frac{\partial D_2}{\partial y_1} = \frac{\partial\left(\sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}\right)}{\partial y_1} = 0$$

Ces calculs permettent de simplifier l'équation précédente de la façon suivante :

$$\left[n_1\frac{\partial D_1}{\partial y_1} + n_2\frac{\partial D_2}{\partial y_1}\right]\mathrm{d}y_1 + \left[n_1\frac{\partial D_1}{\partial y_2} + n_2\frac{\partial D_2}{\partial y_2}\right]\mathrm{d}y_2 = 0 \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad n_1\frac{\partial D_1}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1 + n_2\frac{\partial D_2}{\partial y_2}\mathrm{d}y_2 = 0 \qquad \left(\frac{\partial D_1}{\partial y_2} = 0 \ \text{ et } \ \frac{\partial D_2}{\partial y_1} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad n_1\frac{\partial D_1}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1 = -n_2\frac{\partial D_2}{\partial y_2}\mathrm{d}y_2 \qquad \text{(Séparer les termes)}$$

Lorsqu'on recherche la position où se produit le changement de milieu, il faut faire varier y_1 par $\mathrm{d}y_1$ et y_2 par $\mathrm{d}y_2$. Étant donné que y_1 et y_2 se partage un espace constant ($y_1 + y_2 = \text{constante}$), les variations de ces deux variables sont toujours de sens contraire (si $\mathrm{d}y_1 \uparrow$, alors $\mathrm{d}y_2 \downarrow$). On peut donc affirmer la relation suivante :

$$\mathrm{d}y_2 = -\mathrm{d}y_1 \qquad (\text{car } y_1 + y_2 = \text{constante})$$

Cette relation nous permet alors d'obtenir :

$$n_1 \frac{\partial D_1}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1 = -n_2 \frac{\partial D_2}{\partial y_2}\mathrm{d}y_2 \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad n_1 \frac{\partial D_1}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1 = -n_2 \frac{\partial D_2}{\partial y_2}(-\mathrm{d}y_1) \qquad (\text{Remplacer } \mathrm{d}y_2 = -\mathrm{d}y_1)$$

$$\Rightarrow \quad n_1 \frac{\partial D_1}{\partial y_1} = n_2 \frac{\partial D_2}{\partial y_2} \qquad (\text{Simplifier } \mathrm{d}y_1)$$

$$\Rightarrow \quad n_1 \frac{\partial\left(\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}\right)}{\partial y_1} = n_2 \frac{\partial\left(\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}\right)}{\partial y_2} \qquad \left(\text{Pythagore : } D_{1,2} = \sqrt{x_{1,2}^{\ 2} + y_{1,2}^{\ 2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad n_1 \frac{1}{2\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}} \frac{\partial\left(x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}\right)}{\partial y_1} = n_2 \frac{1}{2\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}} \frac{\partial\left(x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}\right)}{\partial y_2} \qquad \left(\text{Dérivée : } \frac{\partial\left(f(x)^n\right)}{\partial x} = n\, f(x)^{n-1} \frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad n_1 \frac{1}{2\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}}(2y_1) = n_2 \frac{1}{2\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}}(2y_2) \qquad \left(\text{Dérivée : } \frac{\partial\left(x^n\right)}{\partial x} = n\, x^{n-1}\right)$$

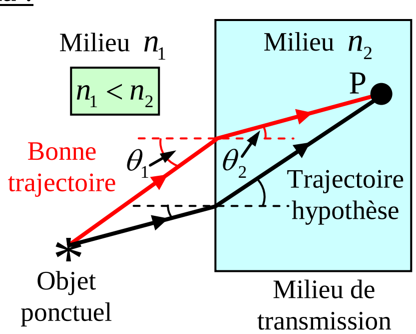
$$\Rightarrow \quad \frac{n_1 y_1}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}} = \frac{n_2 y_2}{\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}} \qquad \text{(Simplifier facteur 2)}$$

$$\Rightarrow \quad n_1 \frac{y_1}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}} = n_2 \frac{y_2}{\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}} \qquad \text{(Réécriture)}$$

$$\Rightarrow \quad n_1 \frac{y_1}{D_1} = n_2 \frac{y_2}{D_2} \qquad \left(\text{Remplacer } D = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad \blacksquare \qquad (\text{Définition sinus : } \sin(\theta) = y / h)$$

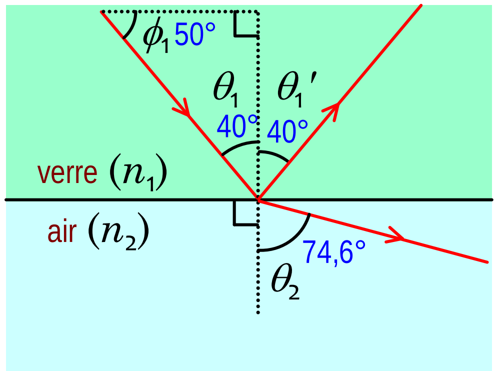
Schéma :



Remarque :

- La lumière voyage plus de distance dans le milieu n_1, car la vitesse dans ce milieu est plus grande .
- La lumière voyage moins de distance dans le milieu n_2, car la vitesse dans ce milieu est plus petite.
- Ce choix minimise le temps de parcours t globalement.

Situation 2 : ***Du verre à l'air.*** Un rayon voyageant dans le verre (n = 1,5) avec une orientation $\phi = -50°$ rencontre un dioptre horizontal qui sépare le verre et l'air. On désire déterminer l'angle **(a)** de réflexion et **(b)** de réfraction.



Évaluons l'angle d'incidence à la surface :

$$\theta_1 = 90 - \phi_1 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 90 - (50°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta_1 = 40°}$$

Appliquons la loi de la réflexion pour évaluer l'angle de réflexion :

$$\theta' = \theta \quad \Rightarrow \quad \theta_1' = \theta_1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta_1' = 40°} \quad \textbf{(a)}$$

Appliquons la loi de la réfraction pour évaluer l'angle de réfraction :

$$n_2 \sin(\theta_2) = n_1 \sin(\theta_1) \quad \Rightarrow \quad (1)\sin(\theta_2) = (1{,}5)\sin(40°) \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_2 = \sin^{-1}(0{,}9642) \qquad \text{(Isoler } \theta_2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta_2 = 74{,}62°} \quad \textbf{(b)} \qquad \text{(Évaluer } \theta_2\text{)}$$

L'angle critique et la réflexion totale interne

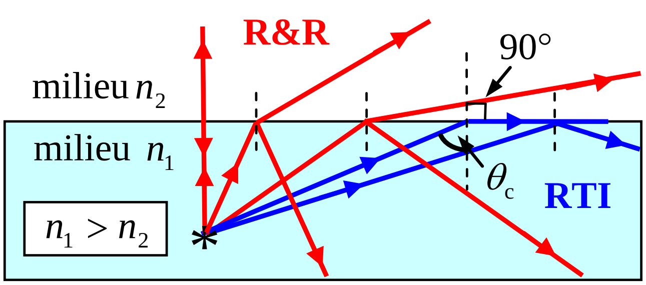
L'angle critique θ_c correspond à l'angle d'incidence où un rayon incident sera réfracté sur un dioptre avec un angle $\theta_2 = 90°$. Lorsque l'angle d'incidence est supérieur à θ_c, il n'y a pas de réfraction et la lumière est complètement réfléchi ce qui porte le nom de réflexion totale interne (RTI). Cela se produit uniquement lorsque la lumière passe d'un milieu tel que $n_1 > n_2$:

$$\theta_c = \arcsin(n_2 / n_1)$$

où θ_c : Angle critique
n_1 : Indice de réfraction du milieu incident
n_2 : Indice de réfraction du milieu de réfraction

La surface de l'eau se comporte comme un miroir, car il y a RTI pour l'observateur dans l'eau.

Un diamant bien taillé favorise la sortie de la lumière sur le devant de la pierre par RTI.



Preuve :

Considérons un rayon incident à une surface avec un angle θ_c tel que l'angle de réfraction est égal à 90°. À partir de la loi de la réfraction, établissons une relation entre les indices de réfraction des deux milieux et l'angle critique θ_c :

$$n_2 \sin(\theta_2) = n_1 \sin(\theta_1) \quad \Rightarrow \quad n_2 \sin(90°) = n_1 \sin(\theta_c) \qquad \text{(Remplacer } \theta_2 = 90° \text{ et } \theta_1 = \theta_c\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad n_2 = n_1 \sin(\theta_c) \qquad \text{(Simplifier } \sin(90°) = 1\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\theta_c) = \frac{n_2}{n_1} \qquad \text{(Isoler } \sin(\theta_c)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad \blacksquare \qquad \text{(Isoler } \theta_c\text{)}$$

P.S. Lors d'une réfraction avec $n_1 > n_2$, si l'on utilise un angle d'incidence $\theta_1 > \theta_c$, la loi de la réfraction donne un l'angle de réfraction θ_2 indéterminé, car :

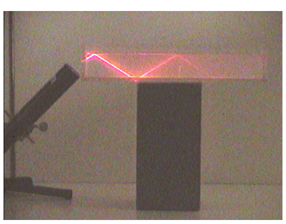
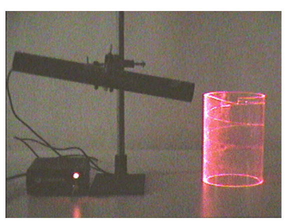
$$\sin^{-1}(>1) = \text{non défini}$$

La fibre optique

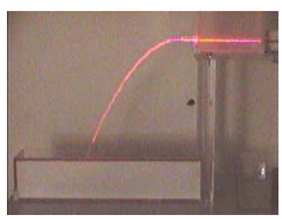
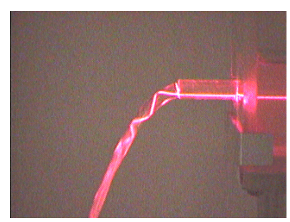
En 1970, l'entreprise américaine Corning Glass Works a développé la **fibre optique** pouvant **guider** la **lumière**[1] d'un laser d'un endroit à un autre par réflexion totale interne[2]. Fabriquée habituellement en verre ou en plastique, la fibre optique permet de transporter de l'information encodée dans un signal lumineux. La fibre optique est constituée d'un cœur d'indice de réfraction légèrement supérieure à la gaine qui recouvre le cœur et une gaine de protection recouvre le tout.

Regroupement de plusieurs fibres optiques

Voici le comportement de la lumière dans différents guides lumineux de grande taille :

Dans du verre

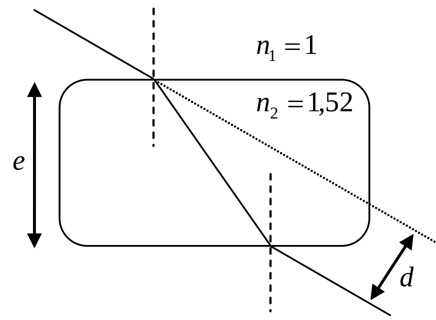
Dans de l'eau

[1] Dans la littérature, on mentionne également que la fibre optique est un guide d'onde, car la lumière est une onde électromagnétique dans le modèle ondulatoire de la lumière.

[2] Il est important de préciser que l'interprétation physique du comportement de la fibre optique devient très complexe lorsque la fibre devient très mince (taille ≈ longueur d'onde de la lumière), car l'approximation de l'optique géométrique devient invalide et l'interprétation de la réflexion totale interne devient inappropriée pour expliquer la propagation de la lumière dans la fibre.

Situation A : ***La déviation à la sortie d'un cube.***

En construction …



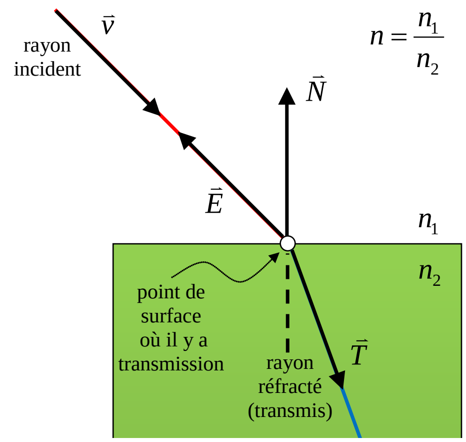
Changement de milieu sans changement d'indice

L'indice de réfraction est une caractéristique très importante des objets transparents, car c'est la déviation qu'elle génère sur la lumière qui la traverse qui permet à un observateur de voir l'objet. Pour ne pas dévier de la lumière à une interface, il suffit d'avoir deux milieux de même indice de réfraction comme dans la situation illustré ci-contre. Plus les indices de réfraction sont semblables, plus les objets transparents nous paressent « invisibles ».

L'indice de réfraction du compte-goutte est identique à celui de l'huile dans la 3^{ième} bouteille.

La réfraction sous forme vectorielle (complément informatique)

À l'aide d'une représentation vectorielle, un rayon incident $\vec{v}$ à une normale à la surface $\vec{N}$ peut être réorienté dans la direction $\vec{T}$ lors d'une transmission grâce à la loi de la réfraction suivante :



$$\vec{T} = n\vec{v} + \left(n\left(\vec{E}\cdot\vec{N}\right) - \sqrt{1 - n^2\left(1 - \left(\vec{E}\cdot\vec{N}\right)^2\right)} \right)\vec{N}$$

et $$\vec{E} = -\vec{v}\ , \quad n = \frac{n_1}{n_2}$$

où $\vec{T}$: Orientation du rayon réfracté (vecteur unitaire, $\left|\vec{T}\right| = 1$).

$\vec{v}$: Orientation du rayon incident (vecteur unitaire, $\left|\vec{v}\right| = 1$).

$\vec{N}$: Orientation de la normale à la surface (vecteur unitaire, $\left|\vec{N}\right| = 1$).

$\vec{E}$: Orientation inverse du rayon incident ($\vec{E} = -\vec{v}$).

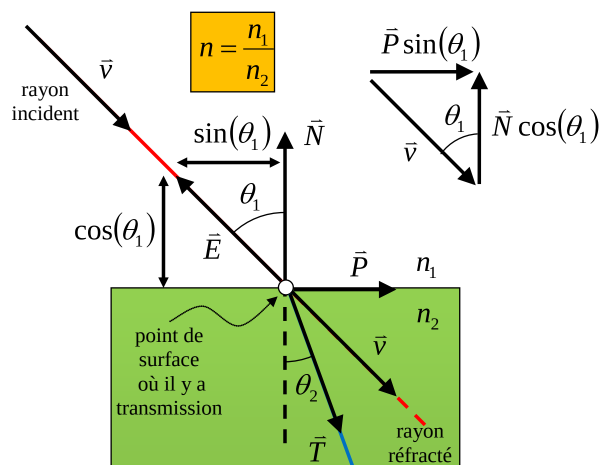
n : Rapport entre l'indice de réfraction incident sur réfracté.

n_1 : Indice de réfraction du milieu incident.

n_2 : Indice de réfraction du milieu réfracté.

Preuve :

Considérons un rayon incident d'orientation (vecteur unitaire) $\vec{v}$ se dirigeant vers une surface dont la normale est orientée selon le vecteur $\vec{N}$ tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.



Évaluons le vecteur transmis $\vec{T}$ à l'aide du vecteur $\vec{E} = -\vec{v}$ en respectant la loi de la réfraction étant

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

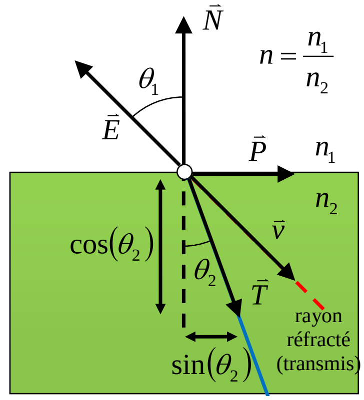
où θ_1 représente l'angle entre $\vec{E}$ et $\vec{N}$ et θ_2 représente l'angle entre $\vec{T}$ et $-\vec{N}$.

À partir de l'angle d'incidence θ_1, nous pouvons construire un vecteur unitaire parallèle à la surface $\vec{P}$ étant

$$\vec{P}\sin(\theta_1) = \vec{v} + \vec{N}\cos(\theta_1) \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \frac{\vec{v} + \vec{N}\cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)}\ .$$

À partir de l'angle de réfraction θ_2, nous pouvons construire le vecteur unitaire $\vec{T}$ étant

$$\vec{T} = \vec{P}\sin(\theta_2) - \vec{N}\cos(\theta_2) .$$



Développons cette dernière expression afin d'obtenir une expression de $\vec{T}$ sans faire référence à l'angle de réfraction θ_2 :

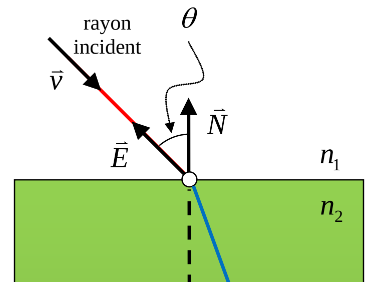
	$\vec{T} = \vec{P}\sin(\theta_2) - \vec{N}\cos(\theta_2)$	(Vecteur réfracté unitaire)
$\Rightarrow$	$\vec{T} = \left(\frac{\vec{v} + \vec{N}\cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)}\right)\sin(\theta_2) - \vec{N}\cos(\theta_2)$	(Remplacer $\vec{P} = \frac{\vec{v} + \vec{N}\cos(\theta_1)}{\sin(\theta_1)}$)
$\Rightarrow$	$\vec{T} = \left(\vec{v} + \vec{N}\cos(\theta_1)\right)\frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1)} - \vec{N}\cos(\theta_2)$	(Regrouper $\frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1)}$)
$\Rightarrow$	$\vec{T} = \left(\vec{v} + \vec{N}\cos(\theta_1)\right)n - \vec{N}\cos(\theta_2)$	(Loi de la réfraction : $n = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1)}$)
$\Rightarrow$	$\vec{T} = n\vec{v} + \vec{N}\left(n\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)\right)$	(Distribution de *n*)
$\Rightarrow$	$\vec{T} = n\vec{v} + \vec{N}\left(n\cos(\theta_1) - \sqrt{\cos^2(\theta_2)}\right)$	($\cos(\theta_2) = \sqrt{\cos^2(\theta_2)}$)
$\Rightarrow$	$\vec{T} = n\vec{v} + \vec{N}\left(n\cos(\theta_1) - \sqrt{1 - \sin^2(\theta_2)}\right)$	($\cos^2(\theta_2) = 1 - \sin^2(\theta_2)$)
$\Rightarrow$	$\vec{T} = n\vec{v} + \vec{N}\left(n\cos(\theta_1) - \sqrt{1 - \left(n\sin(\theta_1)\right)^2}\right)$	(Loi de la réfraction : $\sin(\theta_2) = n\sin(\theta_1)$)
$\Rightarrow$	$\vec{T} = n\vec{v} + \vec{N}\left(n\cos(\theta_1) - \sqrt{1 - n^2\sin^2(\theta_1)}\right)$	(Développer le carré)
$\Rightarrow$	$\vec{T} = n\vec{v} + \vec{N}\left(n\cos(\theta_1) - \sqrt{1 - n^2\left(1 - \cos^2(\theta_1)\right)}\right)$	($\sin^2(\theta_1) = 1 - \cos^2(\theta_1)$)
$\Rightarrow$	$\vec{T} = n\vec{v} + \vec{N}\left(n\left(\vec{E}\cdot\vec{N}\right) - \sqrt{1 - n^2\left(1 - \left(\vec{E}\cdot\vec{N}\right)^2\right)}\right)$ ■	($\vec{E}\cdot\vec{N} = \lvert\vec{E}\rvert\lvert\vec{N}\rvert\cos(\theta_1) = \cos(\theta_1)$)

En remplaçant $\vec{E} = -\vec{v}$, nous obtenons après quelques simplifications de signe négatif l'expression

$$\vec{T} = n\vec{v} - \left(n\left(\vec{v}\cdot\vec{N}\right) + \sqrt{1 + n^2\left(\left(\vec{v}\cdot\vec{N}\right)^2 - 1\right)}\right)\vec{N} \quad .$$

La réflexion totale interne sous forme vectorielle (complément informatique)

À l'aide d'une représentation vectorielle, un rayon incident $\vec{v}$ à une normale à la surface $\vec{N}$ va subir de la réflexion totale interne sous la condition



$$\left(\vec{v}\cdot\vec{N}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \le 1 \quad .$$

(critère pour avoir de réflexion totale interne)

où $\vec{v}$: Orientation du rayon incident (vecteur unitaire, $\left|\vec{v}\right| = 1$).

$\vec{N}$: Orientation de la normale à la surface (vecteur unitaire, $\left|\vec{N}\right| = 1$).

n_1 : Indice de réfraction du milieu incident.

n_2 : Indice de réfraction du milieu réfracté.

À partir du critère de l'angle critique de réflexion totale interne θ_{c}, développons le critère à satisfaire pour ne pas avoir de réflexion ($\theta_i < \theta_{\mathrm{c}}$) :

$$\theta_i \ge \theta_{\mathrm{c}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta_i) \ge \frac{n_2}{n_1} \qquad \text{(Appliquer la fonction sinus)}$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2(\theta_i) \ge \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \qquad \text{(Mettre au carré)}$$

$$\Rightarrow \quad -\sin^2(\theta_i) \le -\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \qquad \text{(Multiplier par -1, inversion de l'inégalité)}$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2(\theta_i) \le 1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \qquad \text{(Additionner 1 et } \cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{E}\cdot\vec{N}\right)^2 \le 1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \qquad \left(\cos(\theta_{\mathrm{c}}) = \frac{\vec{E}\cdot\vec{N}}{\left|\vec{E}\right|\left|\vec{N}\right|} = \vec{E}\cdot\vec{N}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{E}\cdot\vec{N}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \le 1 \qquad \text{(Regrouper les termes)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(-\vec{v}\right)\cdot\vec{N}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \le 1 \qquad \text{(Remplacer } \vec{E} = -\vec{v}\text{)}$$

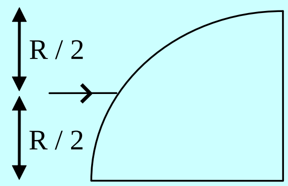
$$\Rightarrow \quad \left(\vec{v}\cdot\vec{N}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \le 1 \quad \blacksquare \qquad \text{(Simplifier signe négatif)}$$

On peut également démontrer que cette expression est équivalente à l'expression précédente

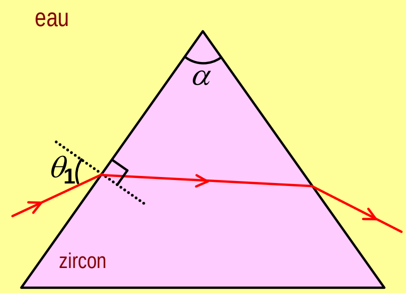
$$1 - n^2\left(1 - \left(\vec{E}\cdot\vec{N}\right)^2\right) \le 0 \quad \text{où} \quad n = n_1 / n_2 \,.$$

Exercices

Exercice A : *Réfraction sur un ¼ de disque.* Un rayon de lumière voyageant dans l'air touche le centre d'un ¼ de disque de plastique (n = 1,33) tel qu'illustré ci-contre. On désire évaluer l'angle de déviation du rayon à la sortie du ¼ de disque par rapport au rayon initial.



Situation 5 : *Double réfraction dans un prisme.* Un prisme de zircon (n = 1,92) entouré d'eau (n = 1,33) possède un angle au sommet α = 70° (schéma ci-contre). (a) Un rayon frappe la face de gauche avec un angle d'incidence θ_1 = 50° : on désire déterminer l'angle de réfraction du rayon qui ressort dans l'eau (face de droite). (b) On diminue graduellement l'angle θ_1 et on désire déterminer pour à partir de quelle valeur de θ_1 on assiste à une réflexion totale interne sur la face de droite.



Solutions

Exercice A : *Réfraction sur un ¼ de disque.*

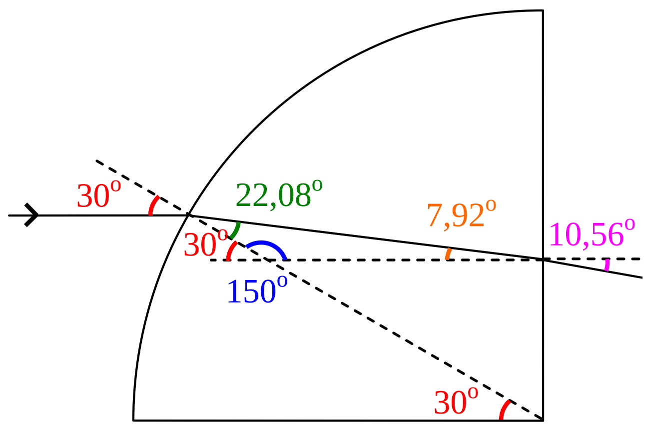
Évaluons l'angle d'incidence de la première réfraction :

$$\sin\theta = \frac{y}{h} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{(R/2)}{(R)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 30°}$$

Évaluons l'angle de la 1$^{\text{ière}}$ réfraction :

$$n_2 \sin(\theta_2) = n_1 \sin(\theta_1) \quad \Rightarrow \quad (1{,}33)\sin(\theta_2) = (1)\sin(30°) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_2 = 22{,}08°}$$

À partir du schéma ci-contre, on peut évaluer l'angle d'incidence de la 2$^{\text{ième}}$ réfraction en utilisant le fait qu'un triangle possède 180$^{\text{o}}$ d'angle intérieur.



Évaluons l'angle de la 2$^{\text{ième}}$ réfraction :

$$n_2 \sin(\theta_2) = n_1 \sin(\theta_1)$$

$$\Rightarrow \quad (1)\sin(\theta_2) = (1{,}33)\sin(7{,}92°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta_2 = 10{,}56°}$$

Puisque le 2$^{\text{ième}}$ angle de réfraction est mesuré par rapport à l'horizontale qui était l'orientation du rayon initial, l'angle $\theta_2 = 10{,}56°$ correspond également à la déviation.

Situation 5 : *Double réfraction dans un prisme.*

En construction …