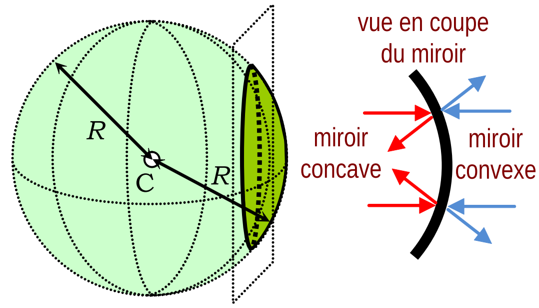
Chapitre 2.3 – Les miroirs sphériques

La forme d'un miroir sphérique

Un miroir sphérique est un miroir courbé tel que tout élément de surface du miroir est à une distance R du centre de courbure C. Le miroir sphérique correspondra alors à une tranche provenant d'une coquille sphérique.



<u>Concave :</u>

Réflexion sur la courbure interne de la sphère.

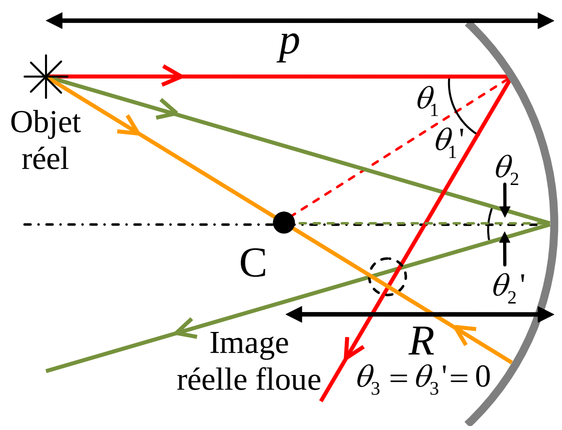
<u>Convexe :</u>

Réflexion sur la courbure externe de la sphère.

La formation d'une image nette sous une approximation

Pour former une image nette, il est primordial que l'ensemble des rayons issus d'un objet se dirigeant vers un déviateur puissent être redirigés vers un même point. Nous remarquons que ce n'est malheureusement pas le cas pour un miroir sphérique.

Suivons la trajectoire de trois rayons issus d'un objet réel qui effectue une réflexion sur un miroir concave de rayon de courbure R. L'objet est situé à une distance y_o d'un axe optique (passant par le centre du miroir) et à une distance p du centre du miroir.

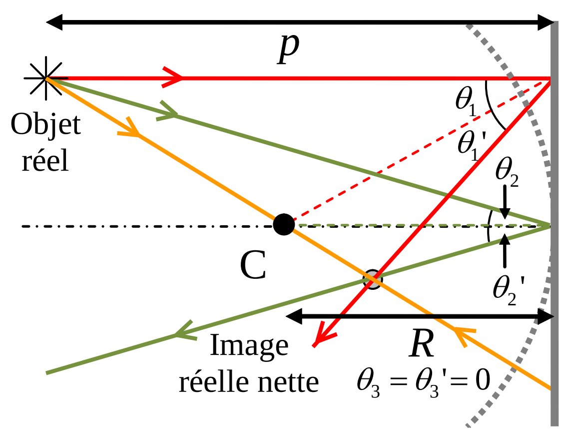


Les trois rayons respectant la loi de la réflexion sont :

1) <u>Parallèle à l'axe optique :</u> $\theta_1' = \theta_1$
2) <u>Vise le centre du miroir :</u> $\theta_2' = \theta_2$
3) <u>Passe par le centre de courbure :</u> $\theta_3' = \theta_3 = 0$

Puisque les trois rayons ne se croisent pas au même endroit graphiquement, <u>l'image finale est floue</u>.

Afin de régler cette situation, nous allons introduire **l'approximation des rayons paraxiaux** (approximation de Gauss). Cela consiste à considérer que l'ensemble des rayons réfléchis par le miroir formant l'image sont relativement parallèle à l'axe optique.

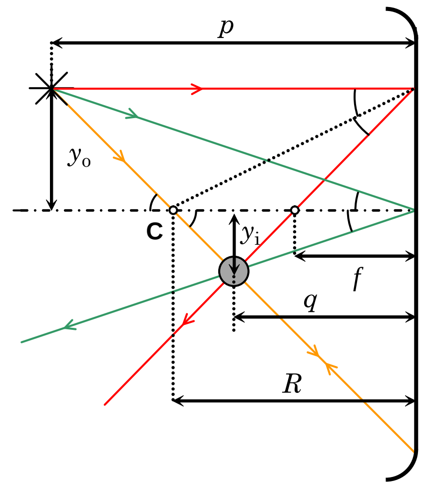


Ainsi :

- Les angles en jeux sont donc beaucoup plus petit que 1 radian ($\theta << 1$ rad).
- Tous les rayons parcourent une distance p parallèle à l'axe optique avant de réfléchir sur le miroir.

Les équations du miroir sphérique

La position d'une image q nette associée à la position d'un objet p devant un miroir sphérique dépend uniquement du rayon de courbure R lorsque l'on applique la **contrainte des rayons paraxiaux :**



$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R} \quad \text{et} \quad \frac{y_i}{y_0}=-\frac{q}{p}$$

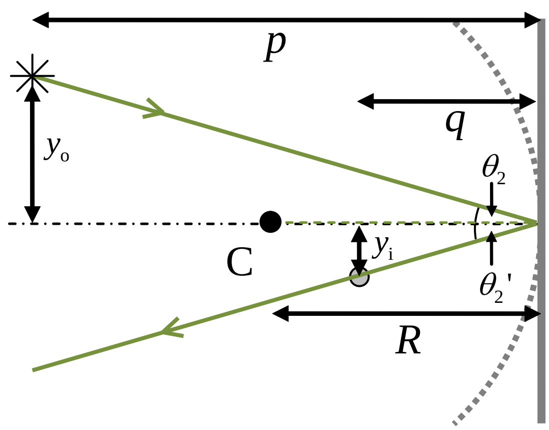
où p : Distance entre l'objet et le miroir (m)
q : Distance entre l'image et le miroir (m)
R : Rayon de courbure du miroir (m)

Convention :

- $R>0$: miroir convave
- $R<0$: miroir convexe
- $p>0$: objet réel
- $p<0$: objet virtuel
- $q>0$: image réelle
- $q<0$: image virtuelle

Preuve :

À partir d'un rayon passant par le centre du miroir, nous pouvons établir la relation géométrique suivante :



$$\tan(\theta_2)=\frac{y_o}{p} \quad \text{et} \quad \tan(\theta_2')=\frac{y_i}{q}$$

En utilisant la loi de la réflexion ($\theta'=\theta$), nous pouvons conclure que :

$$\tan(\theta_2)=\tan(\theta_2') \quad \Rightarrow \quad \frac{y_o}{p}=\frac{y_i}{q} \qquad \text{(Remplacer)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{y_i}{y_o}=\frac{q}{p}} \qquad \text{(Isoler)}$$

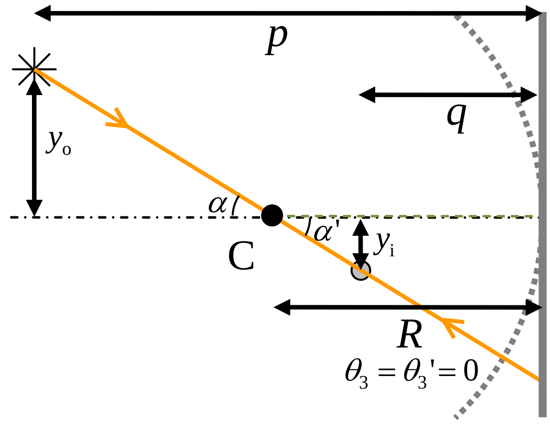
Il est important de remarquer que pour respecter la convention de signe, nous devons formuler la dernière équation de la façon suivante :

$$\frac{y_i}{y_o}=-\frac{q}{p} \qquad \blacksquare \ (1)$$

(avec convention de signe, $y_i<0$ implique une inversion de l'image)

À partir du rayon passant par le centre de courbure du miroir, nous pouvons établir la relation géométrique suivante :

$$\tan(\alpha) = \frac{y_o}{p-R} \quad \text{et} \quad \tan(\alpha') = \frac{y_i}{R-q}$$



Puisque les deux angles α et α' sont des angles opposés par le sommet, nous pouvons conclure que :

$$\tan(\alpha) = \tan(\alpha') \;\Rightarrow\; \frac{y_o}{p-R} = \frac{y_i}{R-q} \qquad \text{(Remplacer)}$$

$$\Rightarrow\; \boxed{\frac{y_i}{y_o} = \frac{R-q}{p-R}} \qquad \text{(Isoler)}$$

Regroupons les deux expressions y_i / y_o afin de former l'expression désirée :

$$\frac{q}{p} = \frac{R-q}{p-R} \quad \Rightarrow \quad q(p-R) = p(R-q) \qquad \text{(Multiplier par les dénominateurs)}$$

$$\Rightarrow \quad pq - qR = pR - pq \qquad \text{(Distribution)}$$

$$\Rightarrow \quad 2pq = pR + qR \qquad \text{(Regrouper terme } pq\text{)}$$

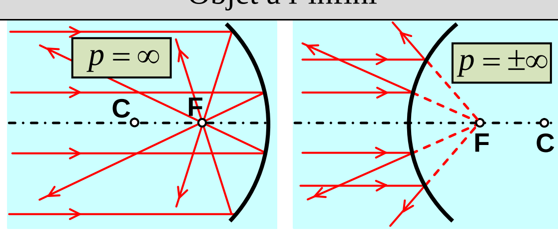
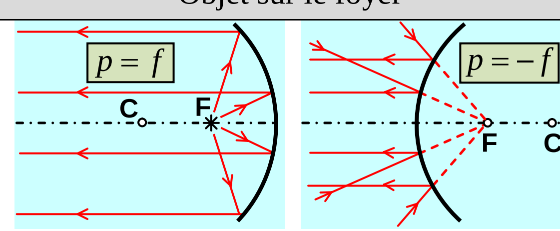
$$\Rightarrow \quad 2pq = R(p+q) \qquad \text{(Factorier } R\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{R} = \frac{p}{pq} + \frac{q}{pq} \qquad \text{(Diviser par } pq\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \quad \blacksquare \; (2) \qquad \text{(Simplifier)}$$

Le foyer d'un miroir sphérique

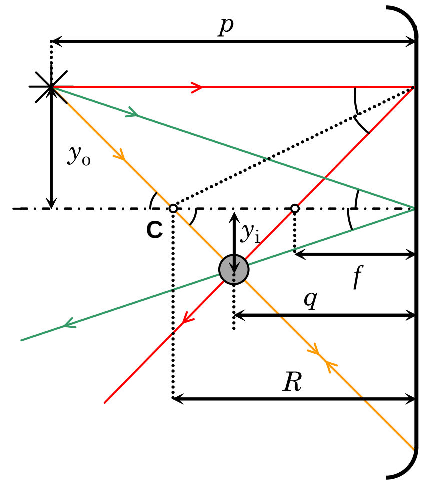
Le foyer d'un miroir sphérique est un point situé sur l'axe optique où est dévié un ensemble de rayons voyageant parallèlement à l'axe optique. De plus, un ensemble de rayons passant par ce foyer avant de réfléchir sur le miroir seront redirigés avec une orientation parallèle à l'axe optique.

Objet à l'infini	Objet sur le foyer
	
Lorsqu'un objet est situé à une très grande distance ($p = \infty$) du miroir, tous les rayons réfléchis passeront par le foyer et y formera une image ($q = \pm f$).	Lorsqu'un objet est situé sur le foyer ($p = \pm f$) du miroir, tous les rayons réfléchis seront parallèle à l'axe central et l'image se formera à l'infini ($q = \infty$).

La relation entre le rayon de courbure d'un miroir sphérique et son foyer est la suivante :

$$f = \frac{R}{2}$$

(miroir sphérique)



où f : Distance focal du miroir (m)
R : Rayon de courbure du miroir (m)

Convention :

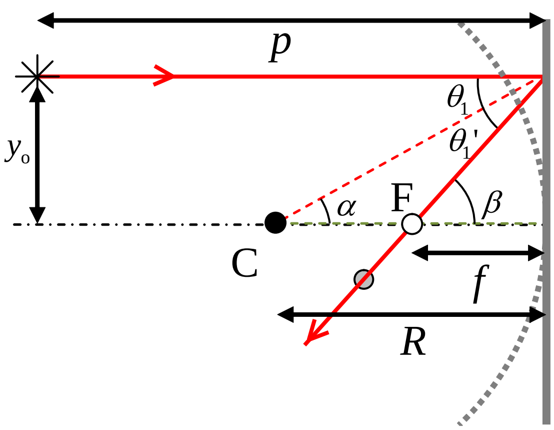
- $f > 0$: miroir convave
- $f < 0$: miroir convexe

Preuve :

À partir du rayon voyageant parallèlement à l'axe central, nous pouvons établir la relation géométrique suivante :

$$\alpha = \theta_1 \qquad \text{et} \qquad \beta = \theta_1 + \theta_1'$$

(angle alterne interne)



En utilisant la loi de la réflexion ($\theta' = \theta$), nous pouvons conclure que :

$$\beta = \theta_1 + \theta_1' \quad \Rightarrow \quad \beta = \theta_1 + (\theta_1) \quad (\text{loi : } \theta_1' = \theta_1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\beta = 2\alpha} \quad (\text{avec } \alpha = \theta_1)$$

Utilisons la définition de la fonction tangente et l'application de l'approximation des rayons paraxiaux ($\tan(\theta) \approx \theta$ car $\theta << 1$) afin d'obtenir :

$$\tan(\alpha) = \frac{y_o}{R} \quad \text{donc} \quad \alpha \approx \frac{y_o}{R} \qquad\qquad \tan(\beta) = \frac{y_o}{f} \quad \text{donc} \quad \beta \approx \frac{y_o}{f}$$

Relions nos deux approximations afin d'établir une relation entre f et R :

$$\beta = \frac{y_o}{f} \quad \Rightarrow \quad (2\alpha) = \frac{y_o}{f} \qquad (\text{Remplacer } \beta = 2\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\frac{y_o}{R}\right) = \frac{y_o}{f} \qquad \left(\text{Remplacer } \alpha = \frac{y_o}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{R}{2} \quad \blacksquare \ (1) \qquad (\text{Simplifier et isoler } f)$$

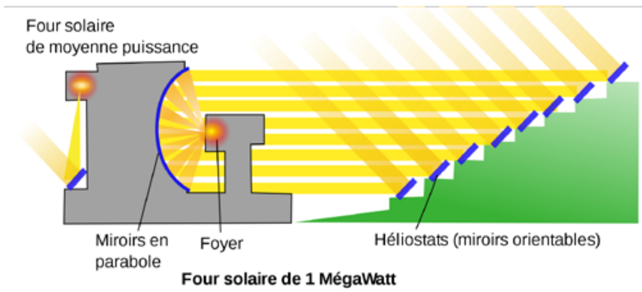
Le four solaire

Un four solaire est une installation permettant de rediriger la lumière du Soleil par réflexion sur un miroir. Afin d'éviter la contrainte des rayons paraxiaux, on y utilise habituellement un miroir parabolique.

Le grand four d'Odeillo fut construit en 1962 en France et génère 1 MW de puissance à l'aide de son miroir parabolique de 54 m de hauteur et 48 m de largeur. Le site exploite 63 miroirs orientables afin de rediriger la lumière du Soleil vers le miroir afin que celui-ci puisse le concentrer.

En quelques secondes, ce dispositif permet d'atteindre des températures de 3500 °C au foyer de l'installation (température du Soleil : 5505 °C).

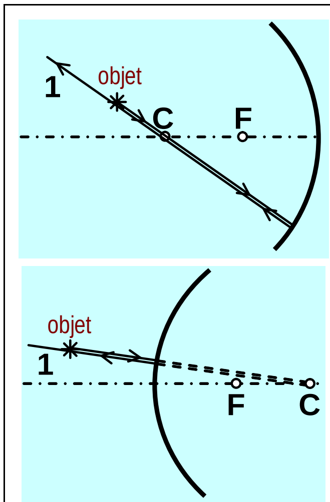
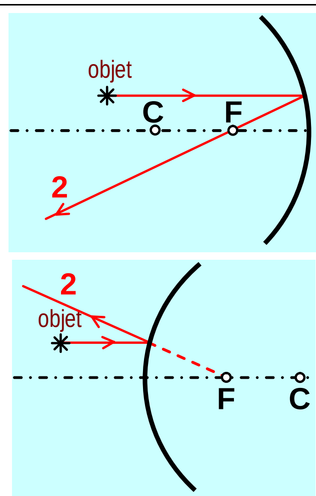
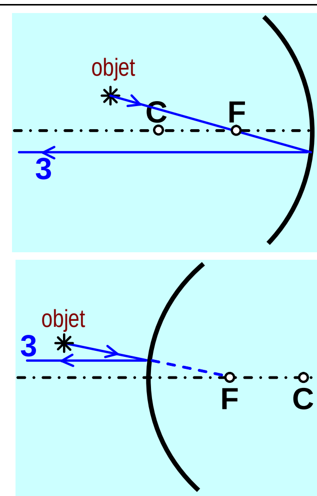
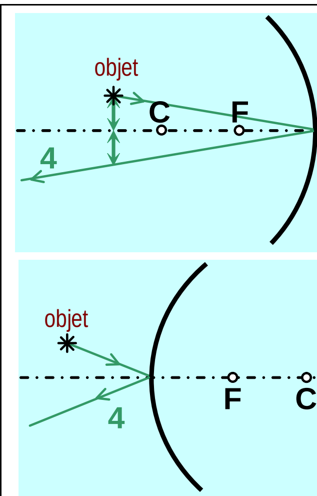
https://www.youtube.com/watch?v=bHAj0YI7ofI
Le grand four d'Odeillo, un laboratoire de recherche du CNRS, France



https://fr.wikipedia.org/wiki/Four_solaire_d%27Odeillo

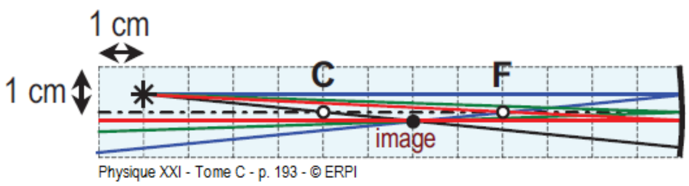
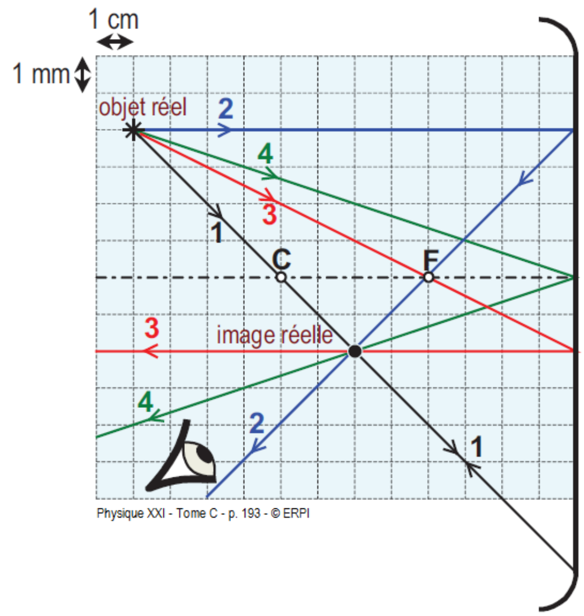
Les rayons principaux d'un miroir sphérique

Voici les quatre rayons principaux d'un miroir sphérique en approximation des rayons paraxiaux :

			
Passe par le centre de courbure et réfléchi sur lui-même.	Parallèle à l'axe, est réfléchi en passant par le foyer.	Passe par le foyer, et réfléchi parallèlement à l'axe.	Frappe le centre du miroir et est réfléchi de façon symétrique par rapport à l'axe.

Situation 1&2&3 : ***Le tracé des rayons principaux.*** Un miroir sphérique *concave* possède un rayon de courbure de 8 cm. Un objet réel est situé à y_o = 4 mm de l'axe optique, vis-à-vis d'un point situé à p = 12 cm du miroir. On désire tracer les rayons principaux et déterminer la position de l'image par les équations.

En effectuant le tracer des rayons principaux, nous obtenons le résultat suivant :

<table>
<tr><th>Sans approximation (à l'échelle)</th><th>Sous l'approximation des rayons paraxiaux</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Évaluons la position de l'image à partir de l'équation des miroirs sphériques :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q}=\frac{2}{R}-\frac{1}{p} \qquad \text{(Isoler } \frac{1}{q}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{q}=\frac{2}{(8\,\text{cm})}-\frac{1}{(12\,\text{cm})} \qquad \text{(Objet réel : } p>0\text{, Miroir concave : } R>0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{q}=0{,}1667\ \text{cm}^{-1} \qquad \text{(Calcul)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q=6\ \text{cm}} \qquad \text{(Inversion, } \textbf{image réelle} \text{ car } q>0\text{)}$$

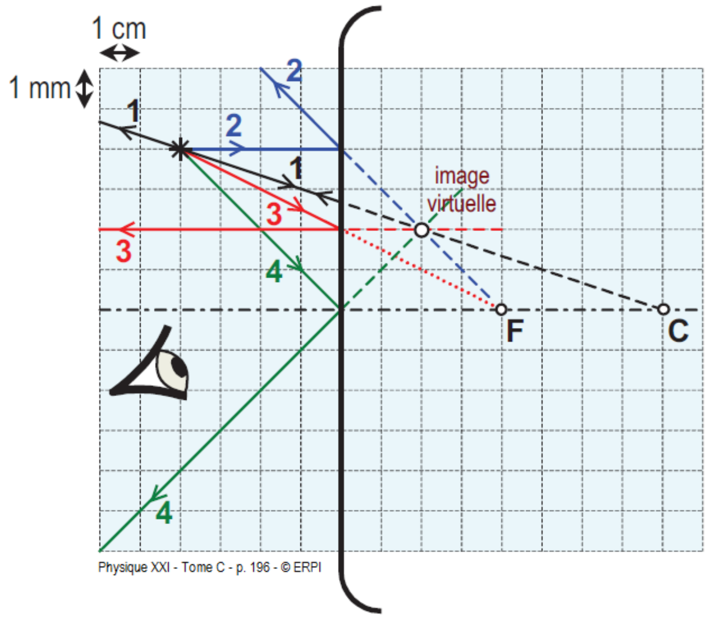
Évaluons la distance entre l'image et l'axe optique (taille de l'image) :

$$\frac{y_i}{y_o}=-\frac{q}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{y_i}{(4\,\text{mm})}=-\frac{(6\,\text{cm})}{(12\,\text{cm})} \qquad \text{(Remplacer valeurs)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_i=-2\ \text{mm}} \qquad \text{(Calcul, } \textbf{image inversée} \text{ car } y_i<0\text{)}$$

Situation 4 : *Le tracé des rayons principaux pour un miroir convexe.* Un miroir sphérique *convexe* possède un rayon de courbure de 8 cm. Un objet réel est situé à y_o = 4 mm de l'axe optique, vis-à-vis d'un point situé à p = 4 cm du miroir. On désire tracer les rayons principaux et déterminer la position de l'image par les équations.

En effectuant le tracer des rayons principaux, nous obtenons le résultat suivant :



Évaluons la position de l'image à partir de l'équation des miroirs sphériques :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q}=\frac{2}{R}-\frac{1}{p} \qquad \text{(Isoler } \frac{1}{q}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{q}=\frac{2}{(-8\,\text{cm})}-\frac{1}{(4\,\text{cm})} \qquad \text{(Objet réel : } p>0\text{, Miroir convexe : } R<0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{q}=-0{,}5\ \text{cm}^{-1} \qquad \text{(Calcul)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q=-2\ \text{cm}} \qquad \text{(Inversion, } \textbf{image virtuelle} \text{ car } q<0\text{)}$$

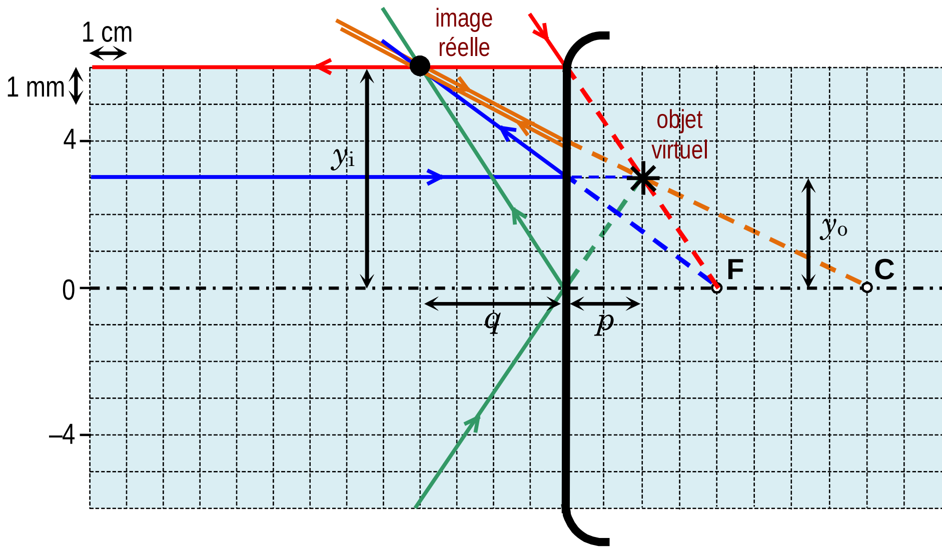
Évaluons la distance entre l'image et l'axe optique (taille de l'image) :

$$\frac{y_i}{y_o}=-\frac{q}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{y_i}{(4\,\text{mm})}=-\frac{(-2\,\text{cm})}{(4\,\text{cm})} \qquad \text{(Remplacer valeurs)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_i=2\ \text{mm}} \qquad \text{(Calcul, } \textbf{image non inversée} \text{ car } y_i>0\text{)}$$

Situation A : ***Le tracé des rayons principaux pour un miroir convexe*** **avec objet imaginaire.** Un miroir sphérique *convexe* possède un rayon de courbure de 8 cm. La lumière provenant d'un objet réel subit une déviation « inconnue » pour former une image réelle située à y_o = 3 mm de l'axe optique, vis-à-vis d'un point situé à 2 cm derrière le miroir. On désire tracer les rayons principaux et déterminer la position de l'image par les équations.

Puisque l'image associée à la déviation « inconnue » génère une image réelle derrière le miroir, cette image sera associée à un objet virtuel pour la réflexion du miroir. Le faisceau d'origine sera alors convergent vers le miroir. En effectuant le tracer des rayons principaux, nous obtenons le résultat suivant :



Évaluons la position de l'image à partir de l'équation des miroirs sphériques :

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q}=\frac{2}{R}-\frac{1}{p}$ (Isoler $\frac{1}{q}$)

$\Rightarrow \quad \frac{1}{q}=\frac{2}{(-8\,\text{cm})}-\frac{1}{(-2\,\text{cm})}$ (Objet virtuel : $p<0$, Miroir convexe : $R<0$)

$\Rightarrow \quad \frac{1}{q}=0{,}25\ \text{cm}^{-1}$ (Calcul)

$\Rightarrow \quad \boxed{q=4\ \text{cm}}$ (Inversion, **image réelle** car $q>0$)

Évaluons la distance entre l'image et l'axe optique (taille de l'image) :

$\frac{y_i}{y_o}=-\frac{q}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{y_i}{(3\,\text{mm})}=-\frac{(4\,\text{cm})}{(-2\,\text{cm})}$ (Remplacer valeurs)

$\Rightarrow \quad \boxed{y_i=6\ \text{mm}}$ (Calcul, **image non inversée** car $y_i>0$)