Chapitre 1.9b – Les ondes sinusoïdales progressives : notions complémentaires

Le mouvement d'un élément du milieu

Lorsqu'une onde voyage dans un milieu, la **fonction d'onde** nous permet d'étudier la **position** dans le **temps** d'un **élément *x*** particulier du milieu **<u>par rapport</u>** à une **position d'équilibre**.

Lorsqu'une onde transversale voyage dans une corde, la fonction d'onde $y = A\sin(kx \pm \omega t + \phi)$ nous permet d'étudier la position verticale d'un élément de corde x à un temps t donné. Puisque la fonction d'onde est une fonction de positionnement, on peut la dériver et obtenir la vitesse verticale $v_y(x,t)$ et l'accélération verticale $a_y(x,t)$ de l'élément de corde x à un temps t :

$$y_{\mathrm{P}} = A\sin(kx_{\mathrm{P}} \pm \omega t + \phi)$$ (Position d'un élément x_{P})

$$v_{y\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{d}\, y_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}t} = \pm A\omega\cos(kx_{\mathrm{P}} \pm \omega t + \phi)$$ (Vitesse[1] d'un élément x_{P})

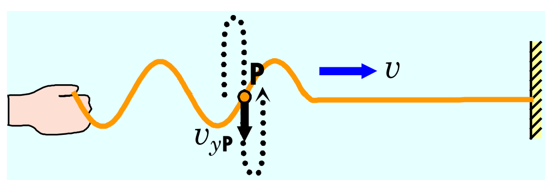
$$a_{y\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{d}\, v_{y\mathrm{P}}}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\sin(kx_{\mathrm{P}} \pm \omega t + \phi)$$ (Accélération d'un élément x_{P})

P.S . La variable x n'est pas une variable pouvant varier dans le temps ($dx/dt = 0$) puisque ce n'est qu'une étiquette désignant le choix de la particule P en étude.

<u>Schéma :</u>

v : Vitesse de propagation de l'onde

$v_{y\mathrm{P}}$: Vitesse de l'élément P de la corde



<u>Rappel :</u>

- Vitesse de propagation d'une onde transversale dans un corde : $v = \sqrt{F/\mu}$
- Vitesse de propagation d'une onde sonore (longitudinale) dans l'air : $v_s = \sqrt{\gamma P/\rho}$

[1] Le symbole ± dépend du sens de propagation de l'onde déterminé par ±ω.

Situation 4 : ***La vitesse et l'accélération d'une particule de la corde.*** Une onde sinusoïdale progressive décrit par la fonction

$$y = 0{,}4\sin(4x - 5t + 1)$$

se déplace sur une corde (x et y sont en mètres, t en secondes et la phase est en radians). On s'intéresse à la particule **P** de la corde située à la position x = 0,5 m. On désire déterminer **(a)** les fonctions qui donnent la position, la vitesse et l'accélération selon l'axe y de la particule en fonction du temps ; **(b)** la position, la vitesse et l'accélération selon y de la particule à t = 3 s ; **(c)** le module de la vitesse de propagation de l'onde sur la corde.

Évaluons les expressions de la position, la vitesse et l'accélération selon l'axe y pour une particule x quelconque :

- Position : $\boxed{y = 0{,}4\sin(4x - 5t + 1)}$

- Vitesse : $v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$

$$\Rightarrow \quad v_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(0{,}4\sin(4x - 5t + 1)\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_y = 0{,}4\cos(4x - 5t + 1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4x - 5t + 1)$$

$$\Rightarrow \quad v_y = 0{,}4\cos(4x - 5t + 1)(-5)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_y = -2\cos(4x - 5t + 1)}$$

- Accélération : $a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$

$$\Rightarrow \quad a_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-2\cos(4x - 5t + 1)\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_y = 2\sin(4x - 5t + 1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4x - 5t + 1)$$

$$\Rightarrow \quad a_y = 2\sin(4x - 5t + 1)(-5)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_y = -10\sin(4x - 5t + 1)}$$

(a) Évaluons les expressions de la position, la vitesse et l'accélération selon l'axe y pour une particule x = 0,5 m :

➢ Position : $y(x = 0{,}5) = 0{,}4\sin(4(0{,}5) - 5t + 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x = 0{,}5) = 0{,}4\sin(2 - 5t + 1)}$

➢ Vitesse : $v_y(x = 0{,}5) = -2\cos(4(0{,}5) - 5t + 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_y(x = 0{,}5) = -2\cos(2 - 5t + 1)}$

➢ Accélération : $a_y(x = 0{,}5) = -10\sin(4(0{,}5) - 5t + 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_y(x = 0{,}5) = -10\sin(2 - 5t + 1)}$

(b) Évaluons la position, la vitesse et l'accélération selon l'axe y de la particule x = 0,5 m à t = 3 s :

➢ Position : $y(x=0{,}5, t=3) = 0{,}4\sin(2-5(3)+1)$

$\Rightarrow \quad y(x=0{,}5, t=3) = 0{,}4\sin(-12)$

$\Rightarrow \quad \boxed{y(x=0{,}5, t=3) = 0{,}2146 \text{ m}}$

➢ Vitesse : $v_y(x=0{,}5, t=3) = -2\cos(2-5(3)+1)$

$\Rightarrow \quad v_y(x=0{,}5, t=3) = -2\cos(-12)$

$\Rightarrow \quad \boxed{v_y(x=0{,}5, t=3) = -1{,}688 \text{ m/s}}$

➢ Accélération : $a_y(x=0{,}5, t=3) = -10\sin(2-5(3)+1)$

$\Rightarrow \quad a_y(x=0{,}5, t=3) = -10\sin(-12)$

$\Rightarrow \quad \boxed{a_y(x=0{,}5, t=3) = -5{,}366 \text{ m/s}^2}$

(c) Évaluons la vitesse de propagation de l'onde sur la corde :

$\lambda = vT \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{2\pi}{k}\right) = v\left(\dfrac{2\pi}{\omega}\right)$ (Remplacer $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$)

$\Rightarrow \quad v = \dfrac{\omega}{k}$ (Isoler v)

$\Rightarrow \quad v = \dfrac{(5)}{(4)}$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{v = 1{,}25 \text{ m/s}}$ (Évaluer v)