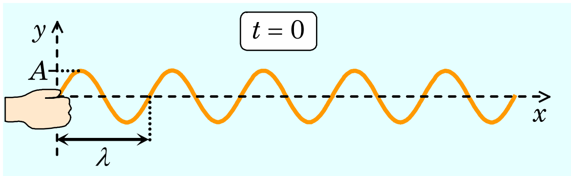
Chapitre 1.9a – Les ondes sinusoïdales progressives

L'onde sinusoïdale progressive

La **forme** de **l'onde** voyageant dans un milieu **dépend** de la **source** du mouvement ainsi que de la **vitesse de propagation** du **milieu**. Pour **simplifier notre étude**, nous allons **seulement** étudier l'évolution dans le temps d'une **onde** ayant une **forme sinusoïdale** (produit par un oscillateur en mouvement harmonique simple). Voici une représentation visuelle des ondes qui seront étudiées dans cette section :

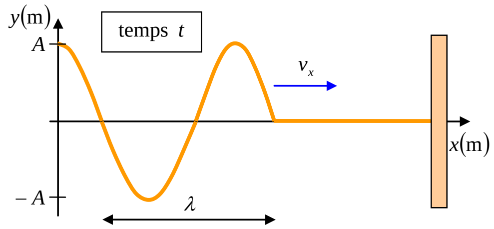


Il est important de préciser que **l'étude d'une onde** représente l'étude d'une **fonction** à **deux dimensions** $y(x,t)$. Si l'on utilise l'exemple de l'oscillation verticale d'une corde pour représenter la fonction $y(x,t)$, nous avons :

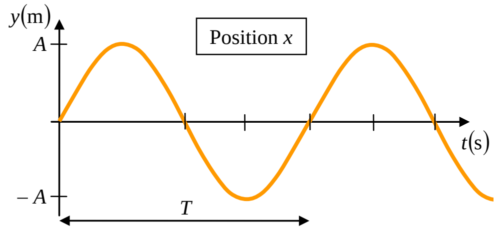
$y(x,t) \quad \rightarrow \quad y$: Position verticale du bout de corde par rapport au point d'équilibre (m)
x : Étiquette d'un bout de corde (position horizontale) (m)
t : Temps écoulé dans le déplacement de l'onde (s)

Ainsi, on peut étudier une onde de deux façons :

1) Étudier la forme de la corde $y(x)$ à un moment t donné ($t =$ constante)



2) Étudier l'évolution d'un bout de corde $y(t)$ d'étiquette x ($x =$ constante)



Nous démontrerons dans les pages suivantes que l'on peut représenter mathématiquement une onde sinusoïdale progressive à l'aide de l'expression

$$y(x,t) = A\sin\left(kx \pm \omega t + \phi\right)$$

où k représente le **nombre d'onde** responsable de la forme de l'onde et ω représente la **fréquence angulaire** conjointement responsable avec k à la vitesse de propagation de l'onde. La valeur de la fréquence angulaire est déterminée par la fréquence f de l'oscillateur responsable de la création de l'onde.

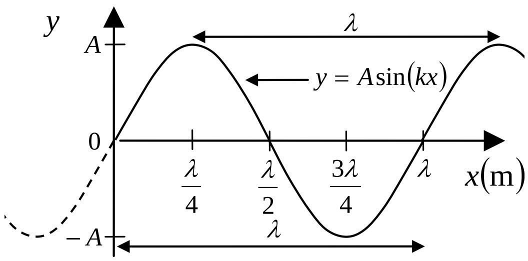
Le nombre d'onde

Le **nombre d'onde** k est le paramètre qui représente une conversion pour transformer une position sur l'axe x en radian dans la fonction sinus de la fonction d'onde. C'est ce qui donne la forme de l'onde :

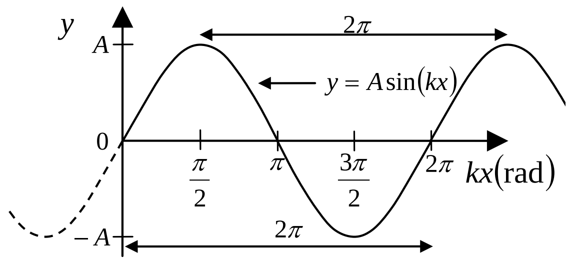
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

où k : Nombre d'onde (rad/m)
2π : Cycle complet en radian de la fonction sinus de l'onde (rad)
λ : Cycle complet spatial de l'onde (m)

y en fonction de x :



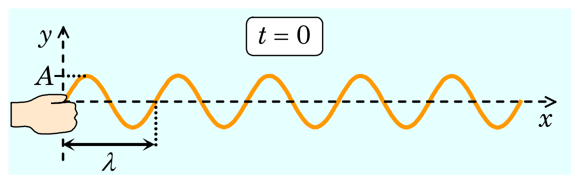
y en fonction de kx :



Preuve :

Soit une onde sinusoïdale progressive à $t = 0$ représentée par le schéma ci-contre où $\phi = 0$ ce qui donne l'équation

$$y(x,0) = A\sin(kx).$$



Nous pouvons établir la table de correspondance suivante à partir de $x = 0$ lorsque $y = 0$ pour chaque cycle de sinus complété :

Nombre de cycles complétés	0	1	2	3	…	N
Nombre de radian complété dans la fonction sinus (rad)	0	2π	4π	6π	…	$2\pi N$
Position x de l'élément de corde (m)	0	λ	2λ	3λ	…	$N\lambda$

Puisque le produit kx représente le nombre de radians complétés dans la fonction sinus, nous pouvons établir la relation suivante entre la constante k et la longueur d'onde λ à partir du tableau précédent :

$kx = \text{nb radian}$ $\Rightarrow$ $k(N\lambda) = 2\pi N$ (Relation entre x et nb radian)

$\Rightarrow$ $k\lambda = 2\pi$ (Relation cycle spatial et cycle en radian)

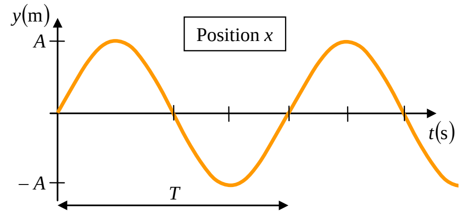
$\Rightarrow$ $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ ■ (Isoler λ)

La fonction d'onde sinusoïdale progressive à une dimension

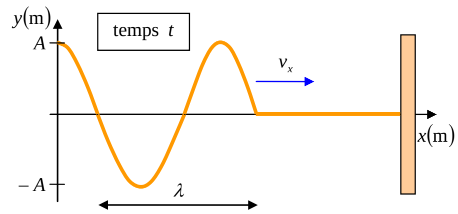
Une onde sinusoïdale produite par un mouvement harmonique simple périodique T et d'amplitude A dans un milieu propageant l'onde à une vitesse v peut s'écrire des deux façons suivantes :

$$y(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

$$y(x,t) = A\sin[k(x \pm vt) + \phi]$$



Étiquette x fixée ce qui donne une fonction y(t)
(un bout de corde x)



Temps t fixé ce qui donne une fonction $y(x)$
(toute la corde)

où y : Position d'un élément x du milieu par rapport à son point d'équilibre (m)

x : Étiquette d'un élément du milieu (m)

t : Temps écoulé dans la propagation de l'onde (s)

A : Amplitude de l'onde (m)

ϕ : Constante de phase (rad)

k : Nombre d'onde (rad/m) ($k = 2\pi / \lambda$)

ω : Fréquence angulaire du mouvement harmonique (rad/s) ($\omega = 2\pi / T$)

v : Vitesse de l'onde dans le milieu (m/s) ($v = \lambda / T = \omega / k$)

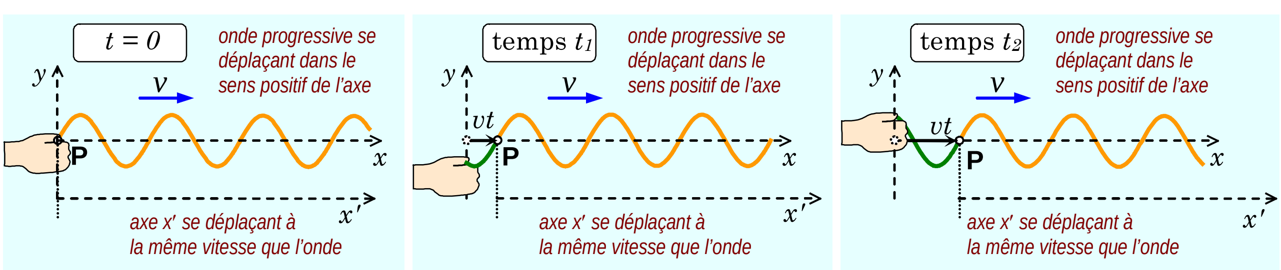
$\pm$: Sens du déplacement de l'onde selon l'axe x

<u>Convention :</u> Vitesse dans le sens positif de l'axe x (-)
Vitesse dans le sens négatif de l'axe x (+)

<u>Preuve :</u>

Lorsqu'une onde se déplace à vitesse v dans le sens positif d'un axe x, on peut la représenter de deux façons :

- L'onde « glisse » le long de l'axe x à vitesse v.
- L'onde est immobile par rapport à un axe x' qui lui se déplace à vitesse v par rapport à l'axe x.



Puisque l'onde est immobile par rapport à l'axe x', l'onde peut être représentée par l'équation

$$y(x',t) = A\sin(kx' + \phi)$$

dans le système d'axe x'.

Puisqu'on désire introduire la notion de vitesse v de l'onde dans notre équation et que l'on veut utiliser l'axe x pour positionner un élément du milieu déplacé par le passage de l'onde, nous devons établir une relation entre x et x' correspondant à une **transformation de Galilée**[1]

$$x = x' + vt$$

ce qui donne le changement de variable

$$x' = x - vt \quad .$$

Remplaçons x' dans la fonction $y(x',t) = A\sin(kx')$ afin de transformer notre fonction d'onde $y(x',t)$ en $y(x,t)$ ce qui donne

$$y(x,t) = A\sin[k(x - vt) + \phi] \quad \blacksquare \ (1)$$

En distribuant le nombre d'onde k dans l'équation, nous obtenons la 2ième représente de l'onde progressive :

$$y(x,t) = A\sin[k(x - vt) + \phi] \quad \Rightarrow \quad y(x,t) = A\sin(kx - kvt + \phi) \qquad \text{(Distribuer } k\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad y(x,t) = A\sin\left(kx - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)vt + \phi\right) \qquad \text{(Remplacer } k = 2\pi/\lambda\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad y(x,t) = A\sin\left(kx - \frac{2\pi}{(vT)}vt + \phi\right) \qquad \text{(Remplacer } \lambda = vT\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi) \qquad \text{(Simplifier } v \text{ et } \omega = 2\pi/T\text{)}$$

Lorsque l'onde se déplace dans le sens négatif de l'axe x, nous devons utiliser la transformation de Galilée est $x = x' - vt$ ce qui nous donne la fonction d'onde

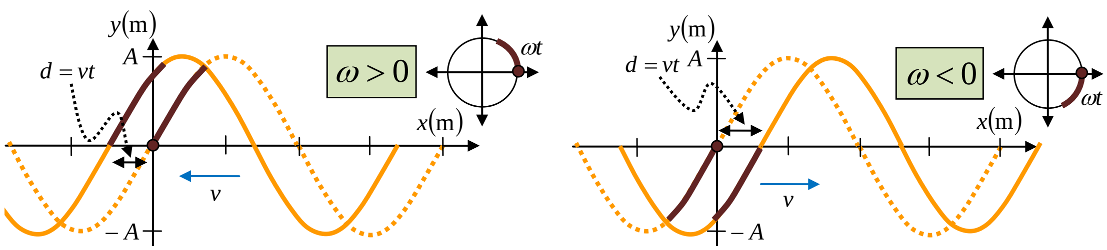
$$y(x,t) = A\sin(kx + \omega t + \phi) \ . \quad \blacksquare \ (2)$$

(Onde sens négatif de l'axe x)

Les déphasages dans la fonction d'onde

Le **déphasage spatial** kx permet de donner la **forme** à l'onde le long de l'axe x. C'est ce paramètre qui dépend de la **longueur d'onde** λ.

Le **déphasage temporel** ωt permet de **déplacer** le long de l'axe x la forme de l'onde selon $d = v\,t$ qui dépend de la **vitesse** de propagation de l'onde et du **temps écoulé**. C'est ce paramètre qui dépend de la **période** T.



Le **déphasage initiale** ϕ permet de **déplacer** l'onde le long de l'axe x selon les **conditions initiales**. Ce paramètre s'ajuste afin de satisfaire $y(x,t)$ et $v_y(x,t)$ à $x = 0$ et $t = 0$.

[1] La transformation de Galilée sera étudiée plus en profondeur à la au chapitre 4.0a

Situation 1 : *De l'équation au graphique.* Une onde sinusoïdale progressive est décrite par l'équation

$$y = 0{,}3\sin\left(0{,}698x + 3{,}49t\right)$$

où x et y sont en mètres et t est en secondes. On désire déterminer **(a)** l'amplitude; **(b)** la longueur d'onde; **(c)** la période; **(d)** le module de la vitesse et **(e)** le sens de propagation de l'onde. On désire également dessiner la corde (pour 0 < x < 20 m) **(f)** à t = 0 et **(g)** à t = T / 4 (où T est la période).

Notre onde sinusoïde progressive possède la forme suivante :

$$y = A\sin\left(kx + \omega t\right)$$

a) À partir de l'analyse de la fonction, nous avons une amplitude est égale à :

$$\boxed{A = 0{,}3\ \text{m}}$$

b) À partir de la relation entre le nombre d'onde et la longueur d'onde, nous avons :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{(0{,}698)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 9\ \text{m}}$$

c) À partir de la relation entre la fréquence angulaire et la période, nous avons :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{(3{,}49)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 1{,}8\ \text{s}}$$

d) À partir de la relation entre la longueur d'onde, la période et la vitesse, nous avons :

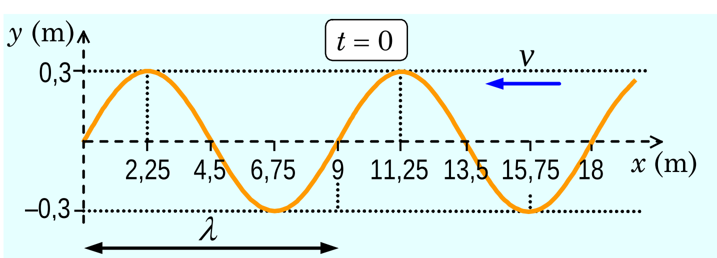
$$\lambda = vT \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{(9)}{(1{,}8)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 5\ \text{m/s}}$$

e) Puisque le terme du déphasage temporel est positif, l'onde se déplace dans le **sens négatif** de **l'axe x**.

f) Voici la forme de l'onde entre $0 \le x \le 20$ à $t = 0\ \text{s}$:

- La fonction d'onde : $y = 0{,}3\sin\left(0{,}698x + 3{,}49(0)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 0{,}3\sin\left(0{,}698x\right)}$
- ¼ de λ : $\lambda_{1/4} = \lambda / 4 = (9)/4 = 2{,}25\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_{1/4} = 2{,}25\ \text{m}}$

Puisque nous n'avons aucun déphasage ϕ, nous avons un sinus non déplacé :



g) Voici la forme de l'onde entre $0 \le x \le 20$ à $t = T/4 = 0{,}45$ s :

- La fonction d'onde : $y = 0{,}3\sin(0{,}698x + 3{,}49(0{,}45))$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = 0{,}3\sin(0{,}698x + \pi/2)}$
- ¼ de λ : *même calcul* $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_{1/4} = 2{,}25 \text{ m}}$

Puisque la fonction d'onde possède un déphasage $\phi = \pi/2$, il faut la déplacer spatialement d'un facteur équivalent à $\pi/2$ radian vers gauche[2]. Utilisons la relation du nombre d'onde ($k\lambda = 2\pi$) pour mesurer le déplacement selon l'axe x :

$k\lambda = 2\pi \quad \Rightarrow \quad kx = \phi$ (Évaluer un déplacement de ϕ)

$\Rightarrow \quad (0{,}698)x = (\pi/2)$ (Remplacer k et ϕ)

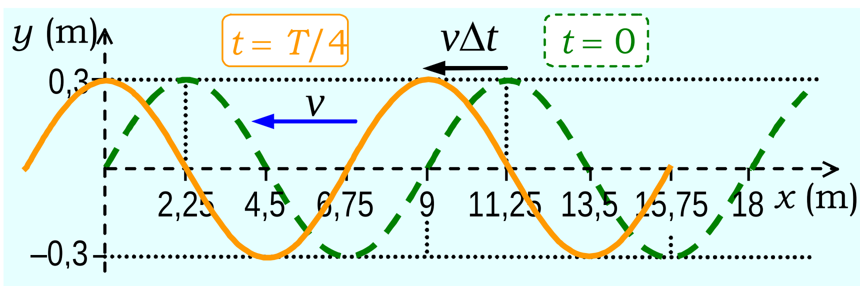
$\Rightarrow \quad \boxed{x = 2{,}25 \text{ m}}$ (Évaluer x)

On peut également utiliser la vitesse de l'onde et le temps écoulé pour mesurer le déplacement de l'onde à l'aide d'un équation de la cinématique :

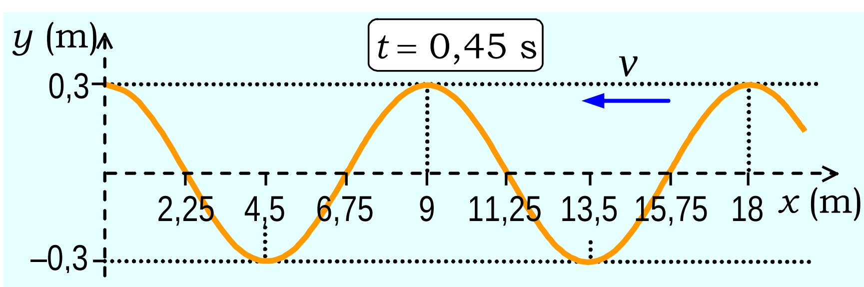
$x = vt \quad \Rightarrow \quad x = (5)(0{,}45)$ (Remplacer v et t)

$\Rightarrow \quad \boxed{x = 2{,}25 \text{ m}}$ (Évaluer x)

Représentation du déplacement de l'onde :

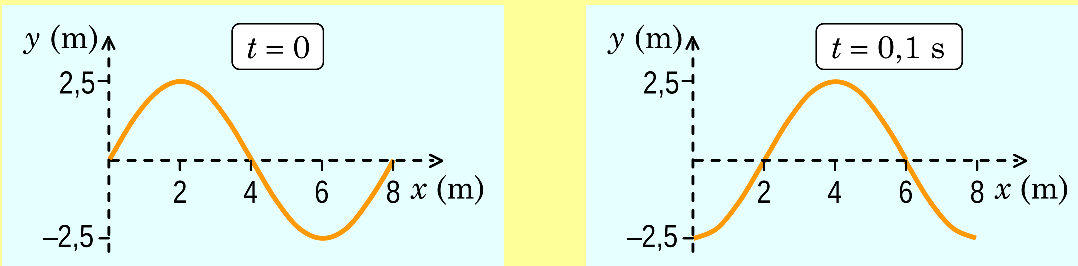


Voici la représentation de l'onde finale :



[2] Rappel : $\phi > 0$ (déplacement vers la gauche), $\phi < 0$ (déplacement vers la droite)

Situation 2: *La fonction d'une onde sinusoïdale à partir de deux photos de la corde.* En photographiant une onde sinusoïdale progressive se déplaçant sur une corde, on a obtenu les deux schémas ci-dessous (pour t = 0, à gauche, et pour t = 0,1 s, à droite). On désire déterminer la fonction $y(x,t)$ qui représente cette onde, en supposant que (a) l'onde possède la plus petite vitesse possible dans le sens positif de l'axe x; (b) l'onde possède la plus petite vitesse possible dans le sens négatif de l'axe x.



Selon le graphique $y(x)$ à $t = 0$ s, nous pouvons évaluer la longueur d'onde de l'onde et l'amplitude maximale du mouvement :

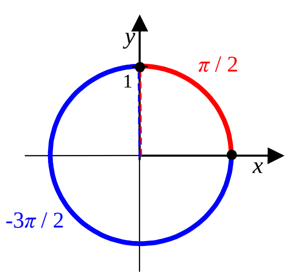
Longueur d'onde : $\lambda = 8$ m Amplitude maximale : $A = 2{,}5$ m

Nous pouvons maintenant évaluer le nombre d'onde k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{(8)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{\pi}{4} \text{ rad/m}}$$

Évaluer notre constante de phase ϕ à l'aide du graphique $y(x)$ à $t = 0$ s et prenons le point $(x = 2 \text{ m}, t = 0, y = 2{,}5 \text{ m})$:

$$y = A\sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad (2{,}5) = (2{,}5)\sin\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)(2) \pm \omega(0) + \phi\right)$$



$$\Rightarrow \quad 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} + \phi = \arcsin(1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} + \phi = \{\ldots, -3\pi/2, \pi/2, 5\pi/2, \ldots\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi = 0} \quad \text{(en prenant la solution } \pi/2\text{)}$$

Ceci nous donne l'équation temporaire

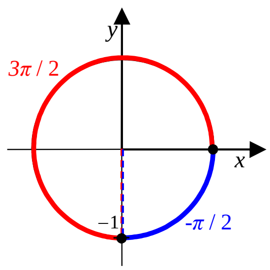
$$y = 2{,}5\sin\left(\frac{\pi}{4}x \pm \omega t\right) .$$

Afin de répondre à la question **(a)** et **(b)**, remplaçons le point $(x = 0 \text{ m}, t = 0{,}1 \text{ s}, y = -2{,}5 \text{ m})$ dans notre équation

$$y = 2{,}5\sin\left(\frac{\pi}{4}x + \omega t\right)$$

où le signe ± a été fixé à positif afin qu'il soit précisé dans le calcul de ω et isolons la fréquence angulaire ω qui aura de multiples résultats :

$$y = 2{,}5\sin\left(\frac{\pi}{4}x + \omega t\right) \quad \Rightarrow \quad (-2{,}5) = (2{,}5)\sin\left(\frac{\pi}{4}(0) + \omega(0{,}1)\right)$$



$$\Rightarrow \quad -1 = \sin(0{,}1\omega)$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}1\omega = \sin^{-1}(-1)$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}1\omega = \{\ldots, -\pi/2,\ 3\pi/2,\ \ldots\}$$

Si l'on choisit la solution $-\pi/2$, alors nous obtenons la plus petite une fréquence angulaire ω <u>négative</u> correspondant à un déplacement de l'onde dans le sens positif de l'axe x :

$$0{,}1\omega = -\pi/2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{-\pi/2}{0{,}1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = -5\pi \text{ rad/s}}$$

Ainsi, nous obtenons l'équation

$$y(x,t) = 2{,}5\sin\left(\frac{\pi}{4}x - 5\pi t\right) \quad \textbf{(a)}$$

Dans ce cas, le module de la vitesse de l'onde sera

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{(5\pi)}{(\pi/4)} = 20 \text{ m/s}$$

ce qui a permis à l'onde de se déplacer dans le <u>sens positif de l'axe</u> (droite) de 2 m en 0,1 s.

Si l'on choisit la solution $3\pi/2$, alors nous obtenons la plus petite une fréquence angulaire ω <u>positive</u> correspondant à un déplacement de l'onde dans le sens négatif de l'axe x :

$$0{,}1\omega = 3\pi/2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{3\pi/2}{0{,}1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = 15\pi \text{ rad/s}}$$

Ainsi, nous obtenons l'équation

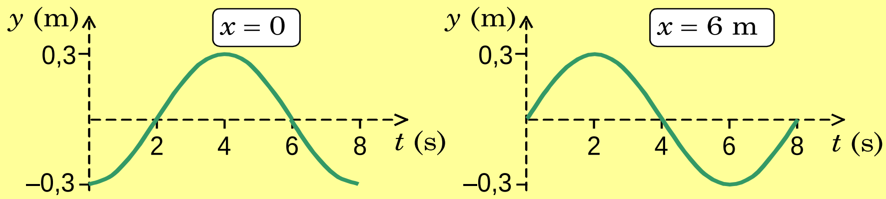
$$y(x,t) = 2{,}5\sin\left(\frac{\pi}{4}x + 15\pi t\right) \quad \textbf{(b)}$$

Dans ce cas, le module de la vitesse de l'onde sera

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{(15\pi)}{(\pi/4)} = 60 \text{ m/s}$$

ce qui a permis à l'onde de se déplacer dans le <u>sens négatif de l'axe</u> (gauche) de 6 m en 0,1 s.

Situation 3: *La fonction à partir du* MHS *de deux points sur la corde.* Une onde sinusoïdale progressive se déplace sur une corde avec une vitesse dont le module est égal à 3 m/s. Les schémas ci-dessous représentent la position y en fonction du temps des points situés en $x = 0$ et en $x = 6$ m sur la corde. On désire déterminer la fonction $y(x,t)$ qui représente cette onde.



À partir du graphique $x = 0$ et $x = 6$, on réalise que la période d'oscillation d'un bout de corde est égale à $T = 8$ s et que l'amplitude maximale est égale à $A = 0{,}3$ m. Avec la vitesse de l'onde, on peut évaluer la fréquence angulaire, la longueur d'onde et le nombre d'onde associé à l'onde :

- $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega = \dfrac{2\pi}{(8)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = 0{,}785 \text{ rad/s}}$
- $\lambda = vT \quad \Rightarrow \quad \lambda = (3)(8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 24 \text{ m}}$
- $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{2\pi}{(24)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 0{,}262 \text{ rad/m}}$

Puisque nous ne savons pas dans quel sens se déplace l'onde, nous pouvons affirmer que l'onde aura la forme suivante :

$$y = A\sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}3\sin(0{,}262x \pm 0{,}785t + \phi)$$

À partir du graphique $x = 0$, nous pouvons utiliser le point $y = -0{,}3$ à $t = 0$ et évaluer la constante de phase :

$$y = A\sin(0{,}262x \pm 0{,}785t + \phi) \quad \Rightarrow \quad (-0{,}3) = (0{,}3)\sin(0{,}262(0) \pm 0{,}785(0) + \phi) \quad \text{(Remplacer)}$$

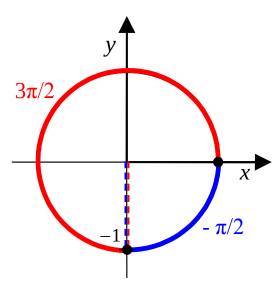
$$\Rightarrow \quad -1 = \sin(\phi)$$

Nous pouvons obtenir les constantes de phase admissible :

$$-1 = \sin(\phi) \quad \Rightarrow \quad \phi = \sin^{-1}(-1)$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \left\{\ldots,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \ldots\right\}$$

<u>P.S.</u> Calculatrice : $\phi = -\pi/2$ rad



Puisqu'il n'y a qu'un seul point sur le cercle trigonométrique correspondant à notre fonction arcsinus, tous les angles sont équivalents. Prenons l'angle positif. Ainsi :

$$y = 0{,}3\sin(0{,}262x \pm 0{,}785t + 3\pi/2) \quad \text{(sens à déterminer)}$$

À partir du graphique $x = 6$, nous pouvons utiliser le point $y = 0{,}3$ à $t = 2$ puis évaluer notre fonction d'onde afin de choisir entre une onde se déplaçant dans le sens positif ou négatif de l'axe *x* :

Sens positif de l'axe *x* :

$$(0{,}3) = 0{,}3\sin\left(0{,}262(6) - 0{,}785(2) + 3\pi / 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}3 = 0{,}3\sin(4{,}712)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0{,}3 \neq -0{,}3}$$

Sens négatif de l'axe *x* :

$$(0{,}3) = 0{,}3\sin\left(0{,}262(6) + 0{,}785(2) + 3\pi / 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}3 = 0{,}3\sin(7{,}854)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0{,}3 = 0{,}3}$$

Ainsi, l'onde se déplace dans le sens négatif de l'axe *x* ce qui donne l'équation d'onde suivante :

$$\boxed{y = 0{,}3\sin\left(0{,}262x + 0{,}785t + 3\pi / 2\right)}$$