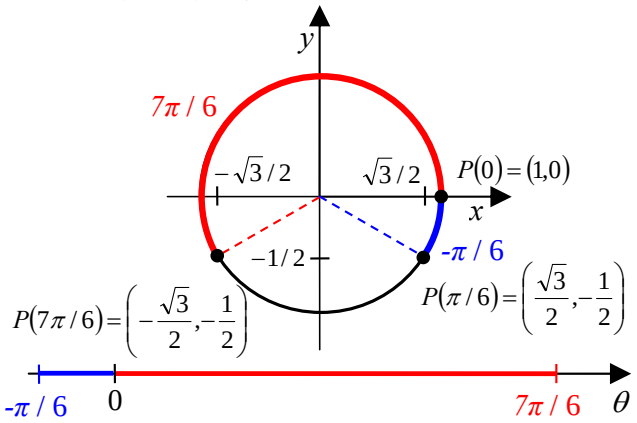
Chapitre 1.5 – Les fonctions trigonométriques inverses et le MHS

La constante de phase quelconque

Lorsqu'on doit évaluer la constante de phase ϕ du mouvement harmonique simple ($x = A\sin(\omega t + \phi)$), il faut manipuler la fonction arcsinus ($\sin^{-1}$). Cette fonction évalue l'arc de cercle requis pour positionner une coordonnée *y* sur un cercle trigonométrique. La difficulté est qu'il y a une infinité d'arcs de cercle menant à une même coordonnée *y* sur un cercle trigonométrique.

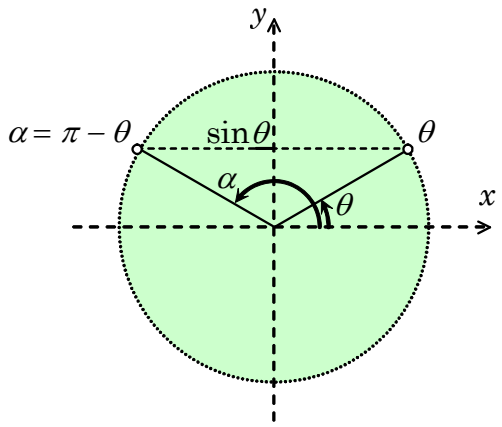
Exemple : $\arcsin(-1/2) = \sin^{-1}(-1/2) = \{\ldots, -5\pi/6, -\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6, \ldots\}$



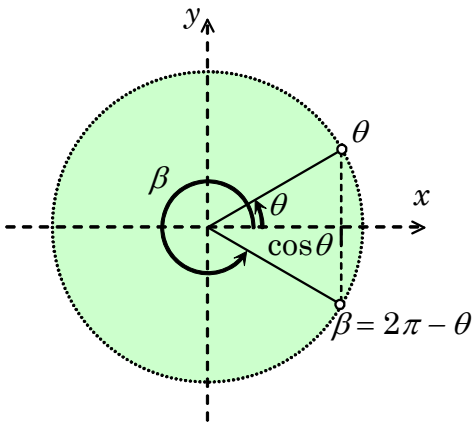
Deux angles pour sinus et cosinus

Dans un cercle trigonométrique, on peut visualiser qu'il y a toujours plusieurs solutions au calcul de la fonction arcsinus et arccosinus. Pour une position en *y* sur le cercle, il y a deux positions en *x* admissibles et vice versa.

Les angles θ et $\alpha = \pi - \theta$ ont le même sinus



Les angles θ et $\beta = 2\pi - \theta$ ont le même cosinus

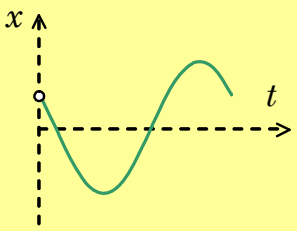


P.S. $\arctan^{-1}(x) = \tan^{-1}(x) = \{\ldots, \theta, \theta + \pi, \ldots\}$

Situation 1 : *La constante de phase d'un MHS.* La position en fonction du temps d'un mobile est donnée par

$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

avec $A = 0{,}4$ m et $\omega = 2$ rad/s. À $t = 0$, le mobile est situé en $x = 0{,}2$ m et il se déplace dans le sens négatif de l'axe x (schéma ci-contre). On désire déterminer la valeur de ϕ ($0 \le \phi < 2\pi$ rad).



Simplifions notre équation de la position pour $t = 0$:

$x = A\sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad (0{,}2) = (0{,}4)\sin((2)(0) + \phi)$ (Remplacer pour $t = 0$)

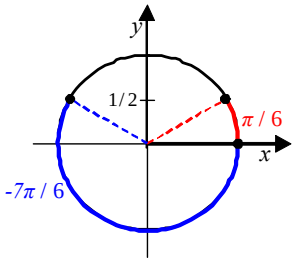
$\Rightarrow \quad \boxed{0{,}5 = \sin(\phi)}$ (Simplification)

Nous pouvons obtenir les constantes de phase admissibles :

$0{,}5 = \sin(\phi) \quad \Rightarrow \quad \phi = \sin^{-1}(0{,}5)$

$\Rightarrow \quad \phi = \left\{ \ldots, \dfrac{-7\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \ldots \right\}$

P.S. Calculatrice : $\phi = \pi/6$ rad



Évaluons la vitesse à $t = 0$ pour ces deux constantes de phase :

$v_x = A\omega\cos(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad v_x = (0{,}4)(2)\cos((2)(0) + (-7\pi/6)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x = -0{,}693 \text{ m/s}}$

$v_x = (0{,}4)(2)\cos((2)(0) + (\pi/6)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x = 0{,}693 \text{ m/s}}$

Puisque le mobile se déplace dans le sens négatif de l'axe x, nous choisissons la constante de phase suivante :

$$\phi = \frac{-7\pi}{6}$$

Dans l'énoncé, on demande que $0 \le \phi \le 2\pi$. Ainsi, nous allons ajouter 2π à notre constante de phase trouvée précédemment :

$\phi = 2\pi + \dfrac{-7\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi = \dfrac{5\pi}{6} = 0{,}262 \text{ rad}}$

Situation 2 : ***Trois instants à la même position.*** La position en fonction du temps d'un mobile est donnée par

$$x = 0{,}5\sin(3t + 4{,}5)$$

où x est en mètres et t est en secondes. On désire déterminer les 3 premiers instants après $t = 0$ où le mobile est situé en $x = -0{,}4$ m.

Simplifions notre équation de la position :

$x = A\sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad (-0{,}4) = (0{,}5)\sin((3)t + (4{,}5))$ (Remplacer pour $x = -0{,}4$)

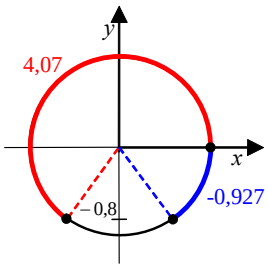
$\Rightarrow \quad \boxed{-0{,}8 = \sin(3t + 4{,}5)}$ (Simplification)

Évaluons les arcs de cercle admissibles :

$-0{,}8 = \sin(3t + 4{,}5) \quad \Rightarrow \quad 3t + 4{,}5 = \sin^{-1}(-0{,}8)$

$\Rightarrow \quad 3t + 4{,}5 = \{..., -0{,}927, \ 4{,}07, ...\}$

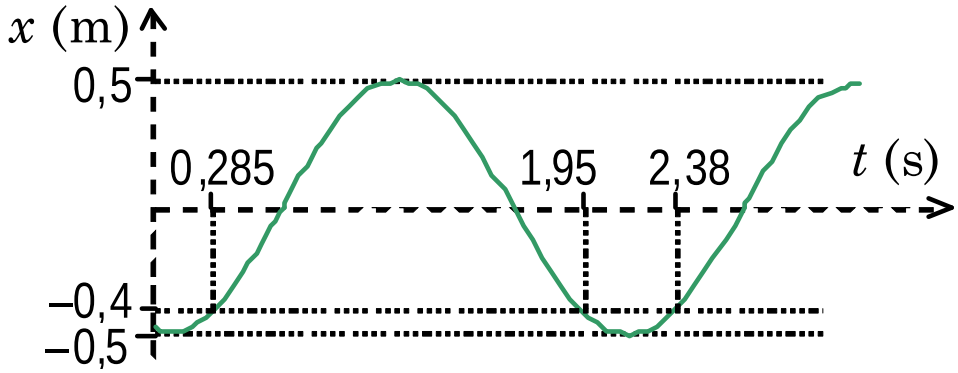
P.S. Calculatrice : $3t + 4{,}5 = -0{,}927$ rad



Nous cherchons les 3 premiers temps positifs :

Essaie 1 :	$-0{,}927$	$3t + 4{,}5 = -0{,}927$	$\Rightarrow$	$t = -1{,}81$ s (non valide)
Essaie 2 :	$4{,}07$	$3t + 4{,}5 = 4{,}07$	$\Rightarrow$	$t = -0{,}143$ s (non valide)
Essaie 3 :	$-0{,}927 + 2\pi$	$3t + 4{,}5 = 5{,}36$	$\Rightarrow$	$\boxed{t = 0{,}287 \text{ s}}$
Essaie 4 :	$4{,}07 + 2\pi$	$3t + 4{,}5 = 10{,}35$	$\Rightarrow$	$\boxed{t = 1{,}95 \text{ s}}$
Essaie 5 :	$-0{,}927 + 4\pi$	$3t + 4{,}5 = 11{,}64$	$\Rightarrow$	$\boxed{t = 2{,}38 \text{ s}}$

Voici une représentation de la fonction avec l'identification des moments où le mobile occupe la position $x = -0{,}4$ m à des temps positifs :



Situation 3 : ***L'amplitude et la constante de phase à partir de la position, de la vitesse et de la fréquence angulaire.*** La position en fonction du temps d'un objet est donnée par

$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

Avec $\omega = 3$ rad/s. À $t = 2$ s, la position de l'objet est $x = -0{,}4$ m et la composante selon x de sa vitesse est $v_x = -0{,}6$ m/s. On désire déterminer la valeurs de A et ϕ. (On veut $A > 0$ et $0 \le \phi \le 2\pi$ rad.)

Exprimons la fonction de la position à 2 secondes :

$x = A\sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad (-0{,}4) = A\sin((3)(2) + \phi)$ (Position à 2 s)

$\Rightarrow \quad \boxed{-0{,}4 = A\sin(6 + \phi)}$ **(1)**

Exprimons la fonction de la vitesse à 2 secondes :

$v_x = A\omega\cos(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad (-0{,}6) = A(3)\cos((3)(2) + \phi)$ (Vitesse à 2 s)

$\Rightarrow \quad \boxed{-0{,}2 = A\cos(6 + \phi)}$ **(2)**

Évaluons le carré de nos deux équations :

De **(1)** : $[-0{,}4]^2 = [A\sin(6 + \phi)]^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{0{,}16 = A^2\sin^2(6 + \phi)}$ **(1)**^{2}

De **(2)** : $[-0{,}2]^2 = [A\cos(6 + \phi)]^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{0{,}04 = A^2\cos^2(6 + \phi)}$ **(2)**^{2}

Additionnons nous deux équations **(1)**^{2} et **(2)**^{2} afin d'évaluer A :

(1)^2 + **(2)**^{2} $\Rightarrow \quad [0{,}16] + [0{,}04] = [A^2\sin^2(6 + \phi)] + [A^2\cos^2(6 + \phi)]$ (Additionner éq.)

(1)^2 **(2)**^{2} **(1)**^{2} **(2)**^{2}

$\Rightarrow \quad 0{,}2 = A^2(\sin^2(6 + \phi) + \cos^2(6 + \phi))$ (Factoriser A et simplification)

$\Rightarrow \quad 0{,}2 = A^2(1)$ $(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1)$

$\Rightarrow \quad A = \pm\sqrt{0{,}2}$ (Isoler A)

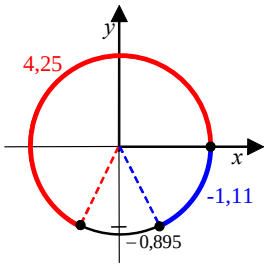
$\Rightarrow \quad \boxed{A = 0{,}447 \text{ m}}$ ($A > 0$ selon l'énoncé)

Simplifions notre équation de la position à 2 s **(1)** en utilisant la valeur de A trouvée :

$-0{,}4 = A\sin(6 + \phi) \quad \Rightarrow \quad -0{,}4 = (0{,}447)\sin(6 + \phi)$ (Remplacer A)

$\Rightarrow \quad \boxed{-0{,}895 = \sin(6 + \phi)}$ (Simplification)

Nous pouvons obtenir les constantes de phase admissibles :



$$-0{,}895 = \sin(6+\phi) \quad \Rightarrow \quad 6+\phi = \sin^{-1}(-0{,}895)$$

$$\Rightarrow \quad 6+\phi = \{\ldots, -1{,}11,\ 4{,}25, \ldots\}$$

P.S. Calculatrice : $6+\phi = -1{,}11$ rad

Nous avons les solutions suivantes pour la constante de phase :

$$6+\phi = \{\ldots, -1{,}11,\ 4{,}25, \ldots\} \quad \Rightarrow \quad \phi = \{\ldots, -1{,}11,\ 4{,}25, \ldots\} - 6$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \{\ldots, -7{,}11, -1{,}75, \ldots\}$$

Ce qui donne :

$$\phi = -7{,}11 + 2\pi n, \quad n \in Z$$

et $$\phi = -1{,}75 + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Choisissons la bonne constante de phase ϕ à partir de l'équation **(2)** de la vitesse à t = 2 s :

$$-0{,}6 = A\omega\cos(6+\phi) \quad \Rightarrow \quad -0{,}6 = (0{,}447)(3)\cos(6+\phi) \quad \text{(Remplacer } A \text{ et } \omega\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-0{,}6 = 1{,}341\cos(6+\phi)} \quad \text{(Simplifier)}$$

Choix 1 : $\phi = -7{,}11 \quad \Rightarrow \quad -0{,}6 = 1{,}341\cos(6+(-7{,}11))$ (Remplacer ϕ)

$$\Rightarrow \quad -0{,}6 \neq 0{,}6 \quad \text{(Contradiction)}$$

Choix 2 : $\phi = -1{,}75 \quad \Rightarrow \quad -0{,}6 = 1{,}341\cos(6+(-1{,}75))$ (Remplacer ϕ)

$$\Rightarrow \quad -0{,}6 = -0{,}6 \quad \text{(Vérification)}$$

Ainsi, nous pouvons choisir la constante de phase suivante :

$$\phi = -1{,}75$$

Dans l'énoncé, on demande que $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Ainsi, nous allons ajouter 2π à notre constante de phase trouvée précédemment :

$$\phi = 2\pi - 1{,}75 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi = 4{,}53 \text{ rad}}$$

Voici l'équation finale :

$$\boxed{x = 0{,}447\sin(3t + 4{,}53)}$$

où $\boxed{A = 0{,}447 \text{ m}}$ et $\boxed{\phi = 4{,}53 \text{ rad}}$