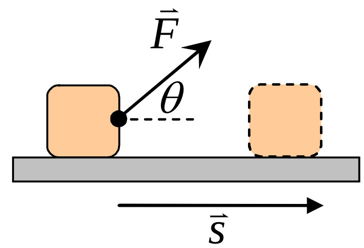
Chapitre 1.4 – L’énergie et le mouvement harmonique simple

Le travail

Nous avons défini le travail W dans le cours de mécanique[1] comme étant l’action d’appliquer une force $\vec{F}$ sur un certain déplacement $\vec{s}$. Physiquement, le travail représente un processus de transformation de l’énergie :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F\, s \cos(\theta)$$



où W : Travail effectué par la force F (J).

$\vec{F}$: Force qui effectue le travail (N).

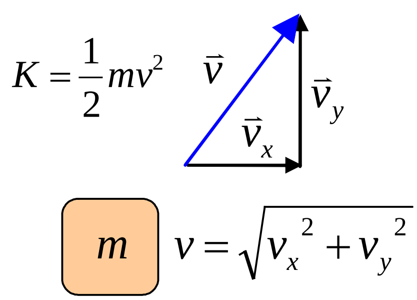
$\vec{s}$: Déplacement sur laquelle la force est appliquée (m).

θ : Angle entre le vecteur force et le vecteur déplacement.

L’énergie cinétique

Nous avons démontré dans le cours de mécanique[2] que l’énergie cinétique K représente l’énergie associée au mouvement d’un objet. Cette énergie se calcul grâce à l’équation suivante :

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$



où K : Énergie cinétique de la masse en mouvement (J).

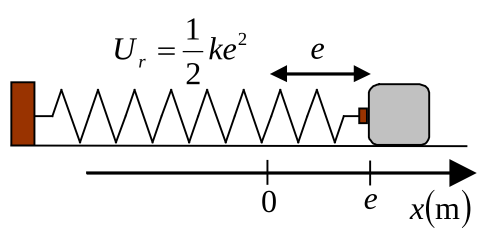
m : Masse de l’objet en mouvement (kg).

v : Vitesse de l’objet (m/s).

L’énergie potentielle du ressort

Nous avons démontré dans le cours de mécanique[3] que l’énergie potentielle emmagasinée dans un ressort se calcul grâce à l’équation suivante :

$$U_r = \frac{1}{2} k e^2$$



où U_r : Énergie potentielle du ressort (J)

k : Constante de rappel du ressort (N/m)

e : Étirement ou compression du ressort (m)

[1] Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 3.1
[2] Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 3.1
[3] Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 3.2

L'énergie d'un système masse-ressort oscillant à l'horizontale

Nous avons défini le théorème de la conservation de l'énergie[4] dans le cours de mécanique de la façon suivante :

$$E_f = E_i + W_{nc} \qquad \text{où} \qquad E = K + U$$

Lorsqu'on applique ce théorème à un système masse-ressort sans frottement, l'équation prend la forme suivante : (aucun travail non conservatif, $W_{nc} = 0$)

$$E_f = E_i \qquad \text{où} \qquad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ke^2$$

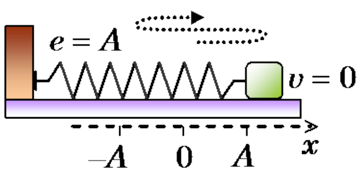
Analysons l'énergie d'un système masse-ressort à l'horizontale avec les équations du mouvement suivantes :

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \qquad \text{et} \qquad v_x(t) = \frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

où $\omega = \sqrt{k/m}$, <u>Condition d'équilibre :</u> $x = 0$ lorsque $e = 0$

<u>Situation 1 :</u> Étirement maximal

$E = K + U_r \quad \Rightarrow \quad E = U_r \qquad$ ($K = 0$, car $v = 0$)

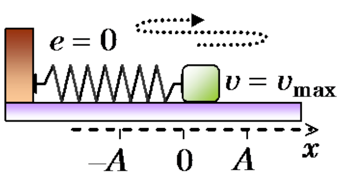


$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}ke^2 \qquad$ (Définition de U_r)

$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2}kA^2} \qquad$ (Étirement maximal, $e = A$)

<u>Situation 2 :</u> Vitesse maximale et position d'équilibre

$E = K + U_r \quad \Rightarrow \quad E = K \qquad$ ($U_r = 0$, car $e = 0$)



$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}mv^2 \qquad$ (Définition de K)

$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \qquad$ (Vitesse maximale, $v = A\omega$)

$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \qquad$ (Distribution du carré)

$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}mA^2\frac{k}{m} \qquad$ (Remplacer $\omega^2 = k/m$)

$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{2}kA^2} \qquad$ (Simplifier m)

[4] Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 3.4

L'énergie d'un système masse-ressort sans frottement à l'horizontale

Avec le théorème de la conservation de l'énergie, nous pouvons affirmer que l'énergie totale E d'un système masse-ressort oscillant sans frottement à l'horizontale est définie par l'équation suivante :

$$E = K + U_r = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \quad \text{ou} \quad E = \frac{1}{2} kA^2$$

Condition d'équilibre : $x = 0$ lorsque $e = 0$.

où E : Énergie total du système masse-ressort (J).

k : Constant du ressort (N/m).

A : Amplitude maximale de l'oscillation (m).

m : Masse en oscillation (kg).

ω : Fréquence angulaire des oscillation (rad/s) avec $\omega^2 = k/m$.

Preuve :

Considérons un système bloc ressort oscillant à l'horizontale. Évaluons la relation entre l'énergie du système et l'amplitude des oscillations à partir d'une situation quelconque. Dans la démonstration, utilisons les équations du mouvement suivantes :

$$x(t) = A\sin(W) \quad \text{et} \quad v_x(t) = A\omega\cos(W) \quad \text{tel que} \quad W = \omega t + \phi$$

En évaluant l'énergie du système, nous avons :

$E = K + U_r \Rightarrow E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} ke^2$ (Définition de K et U_r)

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$ (Relation : $x = e$)

$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2}$ (Remplacer $k = m\omega^2$ avec $\omega^2 = k/m$)

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m(A\omega\cos(W))^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 (A\sin(W))^2$ ($x(t) = A\sin(W)$ et $v_x(t) = A\omega\cos(W)$)

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \cos^2(W) + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(W)$ (Distribution du carré)

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \left[\cos^2(W) + \sin^2(W)\right]$ (Factoriser $\frac{1}{2} m\omega^2 A^2$)

$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2}$ ou $\boxed{E = \frac{1}{2} kA^2}$ ■ (Identité trigo, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$)

Situation A : ***L'énergie en cinématique du MHS.*** Albert dépose un bloc de 5 kg sur une surface horizontale sans frottement. Il attache un ressort horizontal idéal non déformé dont la constante de rappel est égale à 30 N/m sur le bloc et sur un mur fixe. Ensuite, Albert pousse le bloc horizontalement avec une force de 40 N sur une distance de 10 cm. Lorsque le bloc passe à la position d'équilibre dans le sens positif, Albert initialise son chronomètre à t = 0. On désire évaluer la vitesse du bloc à 2 secondes.

Albert effectue un travail sur le système initialement à une énergie nulle. Par conservation de l'énergie, nous pouvons évaluer l'énergie du système :

$E_f = E_i + W_{nc} \quad \Rightarrow \quad E_f = W_{nc}$ ($E_i = 0$, car $K_i = 0$ et $U_{ri} = 0$)

$\Rightarrow \quad E_f = F\, s\cos(\theta)$ (Travail : $F\, s\cos(\theta)$)

$\Rightarrow \quad E_f = (40)(0,1)\cos(0°)$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{E_f = 4\ \text{J}}$ (Énergie totale masse-ressort)

Nous pouvons évaluer l'amplitude du mouvement avec l'énergie totale du système masse-ressort :

$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ (Isoler A)

$\Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2(4)}{30}}$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{A = 0,516\ \text{m}}$ (Évaluer A)

Nous pouvons évaluer la fréquence angulaire du système :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(30)}{(5)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 2,45\ \text{rad/s}}$$

Puisqu'Albert initiale son chronomètre à $x = 0$ (l'équilibre) lorsque le bloc se déplace avec une vitesse positive $v_x > 0$, nous pouvons choisir la constante de phase suivante :

$$\phi = 0$$

(valide avec la fonction sinus pour x)

Évaluons l'équation de la vitesse $t = 2\ \text{s}$ à partir de l'équation de la position du MHS :

$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{\mathrm{d}(A\sin(\omega t + \phi))}{\mathrm{d}t}$ (Remplacer $x = A\sin(\omega t + \phi)$)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = A\omega\cos(\omega t + \phi)}$ (Évaluer la dérivée)

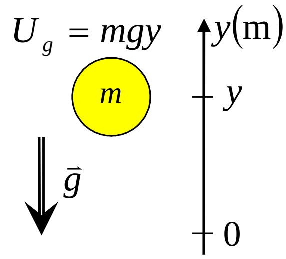
$\Rightarrow \quad v_x = (0,516)(2,45)\cos((2,45)t + (0))$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = 0,236\ \text{m/s}}$ (Évaluer $v_x(t = 2)$)

L'énergie potentielle gravitationnelle

Nous avons démontré dans le cours de mécanique[5] que l'énergie potentielle emmagasinée dans un champ gravitationnel constant se calcul grâce à l'équation suivante :

$$U_g = mgy$$



où U_g : Énergie potentielle gravitationnelle (J)

m : Masse de l'objet dans le champ gravitationnel (kg)

g : Le champ gravitationnel (N/kg)

y : La position verticale de l'objet (m)

L'énergie d'un pendule sans résistance de l'air à faible amplitude

Avec le théorème de la conservation de l'énergie, nous pouvons affirmer que l'énergie totale E d'un pendule oscillant sans résistance de l'aire est définie par l'équation suivante sous approximation des petites oscillations :

$$E = K + U_g = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

(sous l'approximation des petits angles)

Condition d'équilibre : $x = y = 0$ lorsque $\theta = 0$.

où E : Énergie total du pendule (J)

m : Masse du pendule (kg)

ω : Fréquence angulaire de l'oscillation (rad/s) ($\omega = \sqrt{g/L}$)

A : Amplitude maximale de l'oscillation (m)

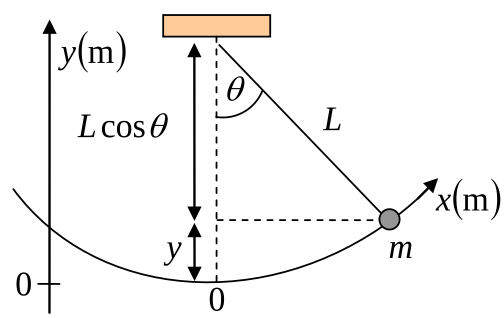
Preuve :

Considérons un pendule oscillant sous l'effet de la gravité. Évaluons la relation entre l'énergie du système et l'amplitude des oscillations à partir d'une situation quelconque. Dans la démonstration, utilisons les équations du mouvement suivantes :

$$x(t) = A\sin(W)$$

et $$v_x(t) = A\omega\cos(W)$$

tel que $$W = \omega t + \phi$$



Posons l'énergie potentielle gravitationnelle nulle au point d'équilibre. Cette contrainte permet d'affirmer que

$$x = y = 0 \quad \text{lorsque} \quad \theta = 0.$$

[5] Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 3.3

En évaluant l'énergie du système et appliquons l'approximation des petits angles ($\theta << 1$ rad) étant nécessaire pour obtenir le MHS chez le pendule (voir section 1.2) :

$$E = K + U_g \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \qquad \text{(Déf. de } K, U_r \text{ et } U_g\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1-\cos\theta) \qquad \text{(Remplacer } y = L(1-\cos\theta)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad E \approx \frac{1}{2}mv^2 + mgL\left(1-\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right) \qquad \text{(Série de Taylor : } \cos(\theta) \approx 1-\frac{\theta^2}{2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad E \approx \frac{1}{2}mv^2 + mgL\frac{\theta^2}{2} \qquad \text{(Simplification)}$$

$$\Rightarrow \quad E \approx \frac{1}{2}mv^2 + mgL\frac{(x/L)^2}{2} \qquad \text{(Remplacer } \theta = x/L\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad E \approx \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\frac{g}{L}x^2 \qquad \text{(Simplification)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E \approx \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2} \qquad \text{(Remplacer } \omega^2 = g/L\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad E \approx \frac{1}{2}m[A\omega\cos(W)]^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(A\sin(W))^2 \qquad (x(t) = A\sin(W) \text{ et } v_x(t) = A\omega\cos(W))$$

$$\Rightarrow \quad E \approx \frac{1}{2}m\omega^2A^2\left(\cos^2(W) + \sin^2(W)\right) \qquad \text{(Factoriser } \frac{1}{2}\omega^2A^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E \approx \frac{1}{2}m\omega^2A^2} \qquad (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1)$$

Situation B : Amplitude après une poussée. Un pendule de 3 kg et de 1,9 m de longueur est lancé depuis une hauteur de 2 cm par rapport au point le plus bas qu'il peut être situé avec une vitesse de 0,7 m/s le long d'une trajectoire circulaire. Après quelques instants, on pousse le pendule avec une force de 5 N le long de sa trajectoire dans le sens de son mouvement sur une distance de 10 cm. On désire évaluer l'angle maximal que fait le pendule par rapport à la verticale après la poussée.

Évaluons l'énergie totale du système au moment où le pendule est lancé :

$$E = K + U_g \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}(3)(0,7)^2 + (3)(9,8)(0,02)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = 1,323 \text{ J}}$$

Évaluons le travail effectué par la poussée sur le pendule :

$$W = Fs\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad W = (5)(0{,}1)\cos(0°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = 0{,}5 \ \text{J}}$$

Évaluons l'énergie totale du système après la poussée :

$$E_f = E_i + W \quad \Rightarrow \quad E_f = (1{,}323) + (0{,}5)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_f = 1{,}823 \ \text{J}}$$

Évaluons l'amplitude des oscillations :

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}m\left(\frac{g}{L}\right)A^2$$

$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2EL}{mg}}$$

$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2(1{,}823)(1{,}9)}{(3)(9{,}8)}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = 0{,}4854 \ \text{m}}$$

Évaluons l'angle maximal qu'effectue le pendule par rapport à la verticale :

$$x = L\theta \quad \Rightarrow \quad (A) = L(\theta_{\max})$$

$$\Rightarrow \quad (0{,}4854) = (1{,}9)\theta_{\max}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_{\max} = 0{,}2555 \ \text{rad}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta_{\max} = 14{,}64°}$$

(À la limite de l'approximation)

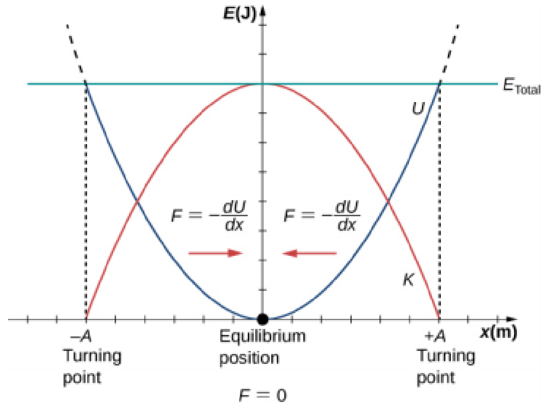
L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique simple

Lorsqu'une force conservatrice peut être représentée sous la forme de l'équation

$$F_x = -m\omega^2 x \quad ,$$

alors on peut y associer un terme d'énergie potentille U_{OHS} qui aura la forme suivante :

$$U_{\text{OHS}} = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$



https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)/Map%3A_University_Physics_I_-_Mechanics%2C_Sound%2C_Oscillations%2C_and_Waves_(OpenStax)/15%3A_Oscillations/15.2%3A_Energy_in_Simple_Harmonic_Motion

Condition d'équilibre :

$x = 0$ correspond à $\sum F_x = 0$.

où U_{OHS} : Énergie associée à la force correspondant à un oscillateur simple (J).

m : Masse de l'objet en oscillation (kg)

ω : Fréquence angulaire de l'oscillation (rad/s)

x : Position de l'objet par rapport à la position d'équilibre (m)

Preuve :

Considérons une force conservatrice de la forme $F_x = -m\omega^2 x$. Appliquons la relation

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

entre la force conservative F_x et son terme d'énergie potentielle U afin d'obtenir une expression de l'énergie potentielle :

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}U = -F_x \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}U = -\left(-m\omega^2 x\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \int_{U_0}^{U} \mathrm{d}U = \int_{x=0}^{x} m\omega^2 x \, \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \left[U\right]_{U_0}^{U} = \left[\frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right]_0^x$$

$$\Rightarrow \quad U - U_0 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - 0$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad \blacksquare$$