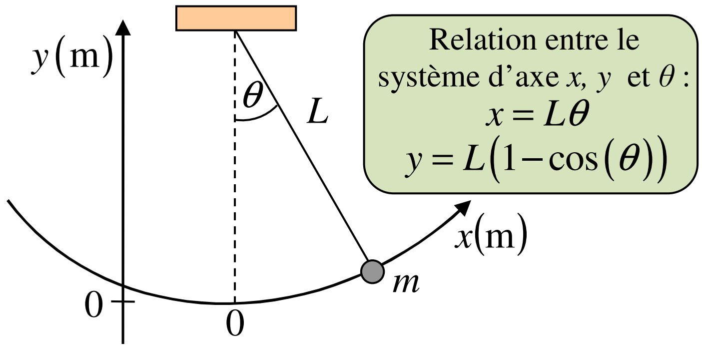
Chapitre 1.2b – La dynamique du mouvement harmonique simple : le pendule simple

Le pendule simple

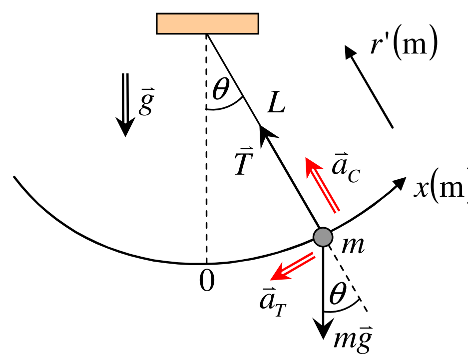
Le pendule simple est constitué d'une masse *m* attachée à une corde tendue de longueur *L* et de masse négligeable fixé à un point donné :



- La masse se déplace sur une trajectoire circulaire de rayon *L* (longueur de la corde).
- On utilise l'axe *x* pour mesurer la position de la masse sur l'arc de cercle défini par un angle d'ouverture θ.
- La position $x = 0$ est mesurée lorsque l'arc de cercle correspond à un angle d'ouverture de $0°$.
- La relation entre le système d'axe *x, y* et θ est $x = L\theta$ ainsi que $y = L(1-\cos(\theta))$.

La dynamique du pendule à petite oscillation

L'application de la 2e loi de Newton à un pendule oscillant dans la gravité sans résistance de l'air ne correspond pas à un mouvement harmonique simple. Cependant, sous l'approximation des petites oscillations ($\theta_{max} < 15°$), l'équation différentielle de la 2e loi de Newton prend la forme de l'oscillateur harmonique simple OHS dont la solution est le mouvement harmonique simple MHS. La fréquence naturelle d'oscillation ω_0 dépend de la racine carrée du rapport entre le champ gravitationnel *g* et la longueur de la corde *L* du pendule :



$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi) \quad \text{tel que} \quad \omega_0 = \sqrt{g / L}$$

où $x(t)$: Position de la masse selon l'axe *x* ($x = 0$ est à l'équilibre) (m)

A : Amplitude du mouvement (m)

ω_0 : Fréquence angulaire naturelle d'oscillation du pendule (rad/s)

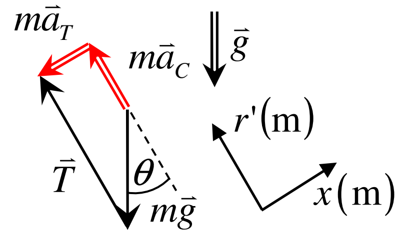
g : Champ gravitationnel (N/kg)

L : Longueur de la corde du pendule (m)

t : Temps écoulé durant l'oscillation (s)

ϕ : Constante de phase (rad)

Preuve :



$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ où $m\vec{g} + \vec{T} = m(\vec{a}_T + \vec{a}_C)$

Appliquons la 2e loi de Newton ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$) à notre pendule à l'aide du système d'axe *x* et *r*':

En *x* : $-mg\sin(\theta) = ma_x$

En *r*' : $T - mg\cos(\theta) = ma_{r'}$

Puisqu'il n'y a pas de mouvement selon l'axe *r*' (pas de déplacement radial) puisque la corde se doit d'être toujours tendue, nous pouvons exploiter la définition de l'accélération centripète $a_C = v^2 / r$ et déterminer la tension dans la corde :

$T - mg\cos(\theta) = ma_{r'} \Rightarrow T - mg\cos(\theta) = m\dfrac{v^2}{r}$ (Trajectoire circulaire : $a_{r'} = a_C = \dfrac{v^2}{r}$)

$\Rightarrow \boxed{T = m\dfrac{v^2}{r} + mg\cos(\theta)}$ (Tension dans la corde)

Développons maintenant l'équation de la 2e loi de Newton selon l'axe *x*

$$-mg\sin(\theta) = ma_x$$

en simplifiant la masse ce qui nous donne l'équation différentielle

$$-g\sin(\theta) = a_x \ .$$

Nous remarquons que l'équation différentielle n'est pas un OHS ($a_x = -\omega_0{}^2 x$). Pour régler la situation, nous allons approximer notre fonction $\sin(\theta)$ autour de $\theta = 0$ à l'aide du développement en série de Maclaurin[1] suivant :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots$$

En approximant qu'au 1er ordre, nous obtenons

$$\sin(x) \approx x$$

ce qui nous permettra d'obtenir un mouvement harmonique simple sous l'approximation des petites oscillations :

$-g\sin(\theta) = a_x \Rightarrow -g\theta \approx a_x$ (Approximation : $\sin(\theta) \approx \theta$)

$\Rightarrow -g(x/L) \approx a_x$ (Arc de cercle $x = L\theta$, remplacer $\theta = x/L$)

$\Rightarrow a_x \approx -\dfrac{g}{L}x$ (Manipulation)

$\Rightarrow a_x \approx -\omega_0{}^2 x$ (Remplacer $\omega_0{}^2 = g/L$, forme de l'OHS)

$\Rightarrow x = A\sin(\omega_0 t + \phi)$ ■ (Solution de l'OHS : MHS)

[1] Le développement de Maclaurin correspond à un développement de Taylor, mais autour de $x = 0$.

Situation 4 : ***Un pendule pour compter les secondes*.** On désire déterminer la longueur de la corde d'un pendule pour que la période naturelle d'oscillation (près de la surface de la Terre) soit de 1 s. (On suppose que l'amplitude d'oscillation est petite.)

À partir de la relation entre la fréquence angulaire naturelle du pendule et sa période naturelle d'oscillation, nous pouvons évaluer la longueur de la corde requise :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{2\pi}{T_0} \qquad \text{(Fréquence angulaire naturelle du pendule)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{g}{L} = \frac{4\pi^2}{T_0^{\,2}} \qquad \text{(Mettre au carré)}$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{gT_0^{\,2}}{4\pi^2} \qquad \text{(Isoler } L\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{(9{,}8)(1)^2}{4\pi^2} \qquad \text{(Remplacer les valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L = 0{,}248 \ \text{m}}$$

Les oscillations de grande amplitude

Pour satisfaire l'équation du mouvement du pendule à petite oscillation, il faut que l'angle d'élévation maximale $\theta_{\max}$ soit beaucoup plus petit que 1 radian ($1 \ \text{rad} = 57{,}3°$).

Voici un tableau démontrant l'inexactitude de la fréquence angulaire $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ lorsque l'amplitude du mouvement est trop importante. Ce tableau est exprimé en fonction de la période de l'oscillation $T = 2\pi/\omega_0$ correspondant à

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad .$$

avec un pendule de longueur $L = 0{,}248 \ \text{m}$ sur la planète Terre ($g = 9{,}8 \ \text{N/kg}$) :

$\theta_{\max}$	5°	10°	15°	20°	30°	45°	60°
$T(\text{s})$	1,0005	1,002	1,004	1,008	1,02	1,04	1,07

Ainsi, **l'approximation du mouvement du pendule à petite oscillation** verra **valide** pour des mouvements **ne dépassant pas** un **angle d'élévation** de $15°$.

On peut également démontrer[2] que la période de l'oscillation $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ peut être mieux estimée par l'équation suivante où $\theta_{\max}$ est l'angle maximale des oscillations en radian :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_{\max}^2 + \frac{11}{3072}\theta_{\max}^4 + \frac{173}{737\,280}\theta_{\max}^6 + \frac{22\,931}{1\,321\,205\,760}\theta_{\max}^8 + \frac{1\,319\,183}{951\,268\,147\,200}\theta_{\max}^{10} + \ldots\right)$$

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics)

Situation A : ***La tension à un moment donné.*** Un pendule de 2 kg et de 4 m de longueur effectue des oscillations avec une amplitude maximale de 10°. Lorsque le pendule fait un angle de 0° avec la verticale et qu'il se déplace dans le sens positif de l'axe *x*, on initialise un chronomètre à $t = 0$. On désire évaluer la tension dans la corde à 3,5 secondes.

L'équation du mouvement aura la forme suivante :

$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

À partir de l'amplitude maximale exprimée en degré, nous pouvons obtenir l'amplitude *A* de l'équation du mouvement :

$$x_{\max} = L\theta_{\max} \quad \Rightarrow \quad x_{\max} = (4)\left(10° \times \frac{2\pi}{360°}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_{\max} = 0{,}698 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = 0{,}698 \text{ m}}$$

Nous pouvons évaluer la fréquence angulaire naturelle du pendule :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(9{,}8)}{(4)}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 1{,}565 \text{ rad/s}}$$

Puisque $\theta = 0$ à $t = 0$, nous avons $x = 0$ à $t = 0$. Nous pouvons évaluer notre constante de phase ϕ :

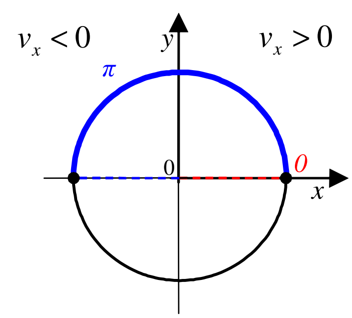
$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad (0) = A\sin(\omega(0) + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sin(\phi)$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \arcsin(0) = \{0,\ \pi\} \text{ (} \phi = 0 \rightarrow \text{vers les} +,\ \ \phi = \pi \rightarrow \text{vers les} - \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi = 0 \text{ rad}} \qquad (\phi = 0 \text{, car la vitesse initiale est positive})$$



Nous avons l'équation de la position suivante :

$$x = 0{,}698\sin(1{,}565t)$$

Avec la dérivée, nous pouvons évaluer l'équation de la vitesse :

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{\mathrm{d}(0{,}698\sin(1{,}565t))}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Remplacer } x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x = 0{,}698(1{,}565)\cos(1{,}565t) \qquad \text{(Évaluer la dérivée)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = 1{,}092\cos(1{,}565t)} \qquad \text{(Simplifier)}$$

Nous pouvons évaluer la vitesse tangentielle du pendule à 3,5 s :

$$v_x(t=3{,}5) = 1{,}092\cos(1{,}565(3{,}5)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x(t=3{,}5) = 0{,}756 \ \text{m/s}}$$

Évaluons la position du pendule à 3,5 s :

$$x(t=3{,}5) = 0{,}698\sin(1{,}565(3{,}5)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t=3{,}5) = -0{,}503 \ \text{m}}$$

Nous pouvons obtenir l'angle d'élévation à 3,5 s :

$$x = L\theta \quad \Rightarrow \quad (-0{,}503) = (4)\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = -0{,}126 \ \text{rad}} \qquad (\theta = -7{,}205°)$$

Évaluons la tension dans la corde à 3,5 s :

$$\sum F_{r'} = ma_{r'}$$

$\Rightarrow \quad T - mg\cos(\theta) = ma_C$ (Tension et force gravitationnelle)

$\Rightarrow \quad T - mg\cos(\theta) = m\dfrac{v^2}{r}$ (Accélération centripète, $a_C = v^2 / r$)

$\Rightarrow \quad T = m\dfrac{{v_x}^2}{L} + mg\cos(\theta)$ (Isoler T et remplacer $r = L$, $v = v_x$)

$\Rightarrow \quad T = m\left(\dfrac{{v_x}^2}{L} + g\cos(\theta)\right)$ (Factoriser m)

$\Rightarrow \quad T = (2)\left(\dfrac{(0{,}756)^2}{(4)} + (9{,}8)\cos(-0{,}126)\right)$ (Remplacer valeurs numériques, en radian)

$\Rightarrow \quad T = (2)(0{,}143 + 9{,}723)$ (Calculs)

$\Rightarrow \quad \boxed{T = 19{,}73 \ \text{N}}$ (Tension dans la corde)