Chapitre 1.1a – Les oscillations

La cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement d'un objet en fonction du temps. Pour ce faire, nous avons recours aux concepts de position, vitesse et accélération :

Position :	$x(t)$	unité : m
Vitesse :	$v_x(t)$	unité : m/s
Accélération :	$a_x(t)$	unité : m/s^2

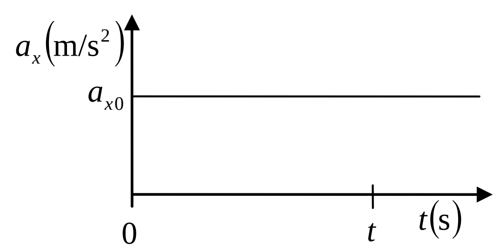
L'objectif de la **cinématique** est de **<u>définir</u>** ces **trois fonctions du temps**. Ces équations forment ensemble les **équations du mouvement**. Grâce au calcul différentiel et intégral, il existe les relations mathématiques entre ces fonctions[1] :

<u>Relation avec la dérivée :</u> $v_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}$ et $a_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,v_x(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}$

<u>Relation intégrale :</u> $v_x(t) - v_{xi} = \displaystyle\int_{t=t_i}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t$ et $x(t) - x_i = \displaystyle\int_{t=t_i}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t$

La cinématique avec une accélération constante

Considérons une accélération constante de la forme $a_x(t) = a_{x0}$. Nous pouvons reconstruire toutes les équations du MUA[2] à partir de l'équation différentielle suivante :



$$a_x(t) = a_{x0} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = a_{x0}$$

(accélération constante)

1) $v_x(t) - v_{xi} = \displaystyle\int_{t=t_i}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad v_x(t) - v_{x0} = \int_{t=0}^{t} a_{x0}\,\mathrm{d}t$ (Remplacer $a_x(t)$)

$\Rightarrow \quad v_x(t) - v_{x0} = a_{x0}\left[t\right]_0^t$ (Résoudre l'intégrale)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_x(t) = v_{x0} + a_{x0} t}$ (Évaluer l'intégrale)

2) $x(t) - x_i = \displaystyle\int_{t=t_i}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x(t) - x_0 = \int_{t=0}^{t} \left(v_{x0} + a_{x0} t\right)\mathrm{d}t$ (Remplacer $v_x(t)$)

$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = v_{x0}\left[t\right]_0^t + a_{x0}\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^t$ (Résoudre l'intégrale)

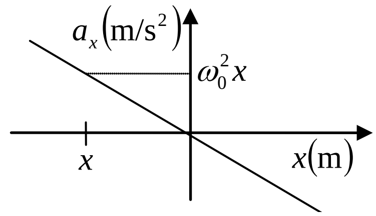
$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = x_0 + v_{x0} t + \dfrac{1}{2} a_{x0} t^2}$ (Évaluer l'intégrale)

---

[1] Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 1.13 et 1.14
[2] Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 1.6

L'oscillateur harmonique simple (OHS)

L'oscillateur harmonique simple OHS est une équation différentielle[3] reliant la position x à l'accélération a_x de la façon suivante :



$$a_x = -\omega^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

Preuve :

À l'aide des relations différentielles reliant $x(t)$, $v_x(t)$ et $a_x(t)$ entre elles, nous pouvons développer l'OHS de la façon suivante :

$a_x = -\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 x$ (Définition de l'accélération, $a_x = \mathrm{d}v_x / \mathrm{d}t$)

$\Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 x$ (Définition de la vitesse, $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$)

$\Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0}$ ■ (Dérivée seconde, $\mathrm{d}(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2 x/\mathrm{d}t^2$)

La solution intuitive de l'OHS

La solution à une équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{que l'on peut écrire sous la forme} \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

est une équation du mouvement $x(t)$ particulière. Pour la déterminer, il faut :

Trouver une équation $x(t)$ telle que « dérivée deux fois » par rapport à t,
elle est égale à elle-même multipliée par la constante $-\omega^2$.

Hypothèse #1 : $x = e^{\omega t}$

Vérification : $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}^2\left(e^{\omega t}\right)}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}\left(\omega e^{\omega t}\right)}{\mathrm{d}t} = \omega^2 e^{\omega t} = \omega^2 x$

Conclusion : Ce choix n'est **pas valide**, car $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \omega^2 x \neq -\omega^2 x$.

Hypothèse #2 : $x = A\sin(\omega t + \phi)$

Vérification : $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}^2\left(A\sin(\omega t + \phi)\right)}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}\left(A\omega\cos(\omega t + \phi)\right)}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$

Conclusion : L'hypothèse #2 est adéquate. La fonction $x(t)$ est **une solution particulière** de l'OHS et porte le nom de mouvement harmonique simple (MHS).

[3]Une **équation différentielle** est une relation mathématique entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées.

Le mouvement harmonique simple (MHS)

L'équation du mouvement harmonique simple MHS est la solution à l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple OHS et elle est représentée mathématiquement à l'aide d'une fonction sinusoïdale. Les conditions de position initiale x_0 et de vitesse initiale v_{x0} nécessaire à la description complète du mouvement $x(t)$ sont décrites à l'intérieur des paramètres d'amplitude A et de constante de phase ϕ :

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

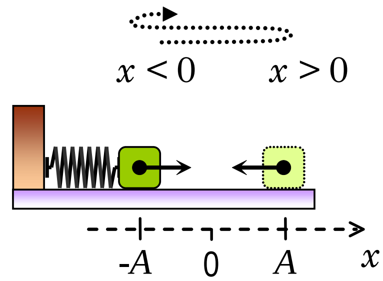
où $x(t)$: Position de l'objet selon l'axe x (m)

A : Amplitude du mouvement (m)

ω : Fréquence angulaire (rad/s)

t : Temps (s)

ϕ : Constante de phase (rad)



Le système masse-ressort est un OHS,
le mouvement est donc un MHS.

Preuve :

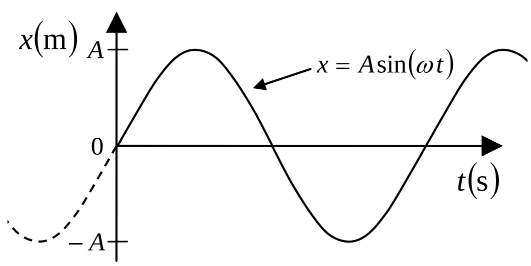
La preuve détaillée reliant le MHS $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ comme étant **la solution la plus générale** à l'OHS $a_x = -\omega^2 x$ est réalisée au chapitre 1.1c. On y trouve également les relations reliant x_0 et v_{x0} aux paramètres A et ϕ.

Les paramètres de l'équation du mouvement harmonique simple

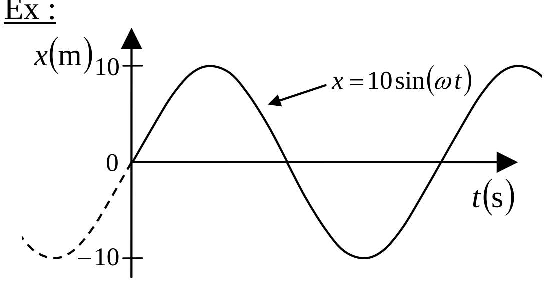
Le mouvement harmonique simple utilise la fonction sinus pour exprimer la position en fonction du temps. Essayons de mieux comprendre les paramètres utilisés pour décrire ce mouvement.

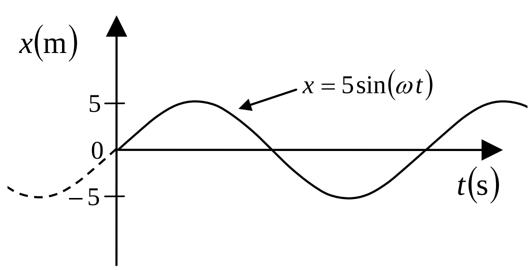
Amplitude A :

L'amplitude est la position maximale atteinte durant le mouvement. Cette position oscille sinusoïdalement entre –A et + A.



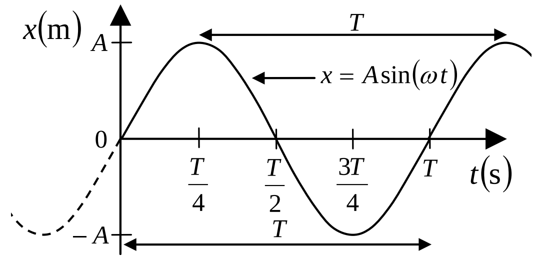
Ex :



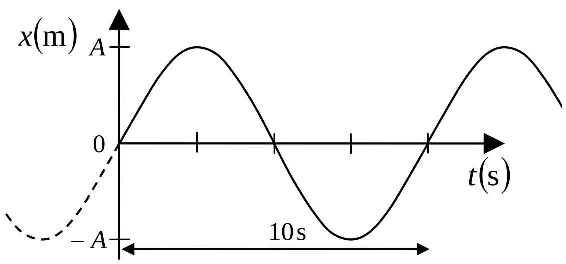


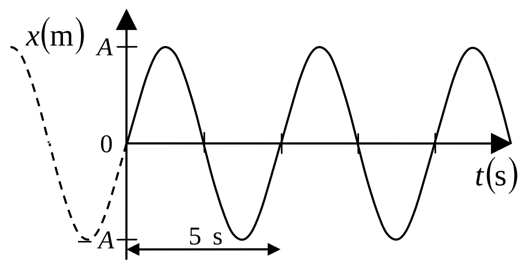
Période T :

La période représente le temps requis pour effectuer une oscillation complète. Cette condition est vérifiée lorsque l'objet revient à sa position initiale avec la même vitesse (module et orientation).



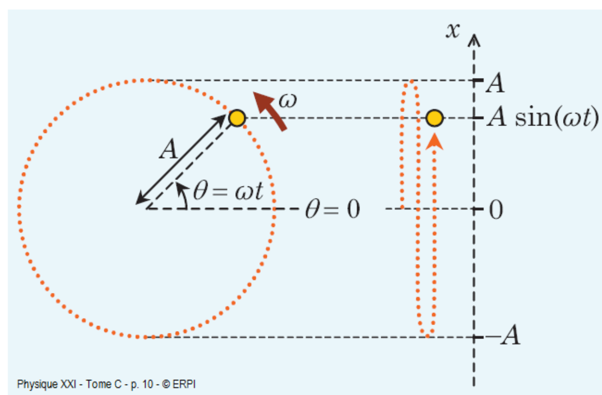
<u>Ex</u> :





Fréquence angulaire ω :

La fréquence angulaire ω représente la vitesse à laquelle une oscillation complète peut être effectuée. Une oscillation est complétée après 2π radians parcourus dans la fonction sinus durant une période complète T. Ainsi, on peut relier la fréquence angulaire ω et la période T grâce à l'expression suivante :



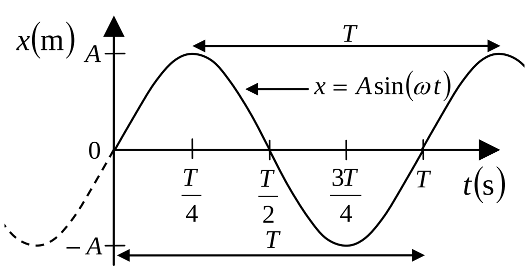
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ou} \quad \omega T = 2\pi$$

où ω : Fréquence angulaire (rad/s)

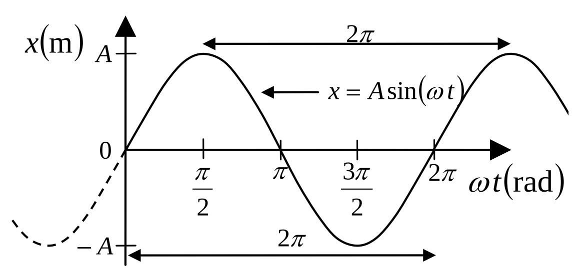
2π : Cycle complet en radian de la fonction sinus de l'oscillation (rad)

T : Cycle complet temporel de l'oscillation, période (s)

Position en fonction de t : (seconde)

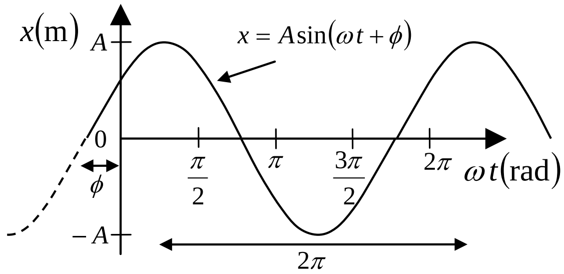


Position en fonction de ωt : (radian)

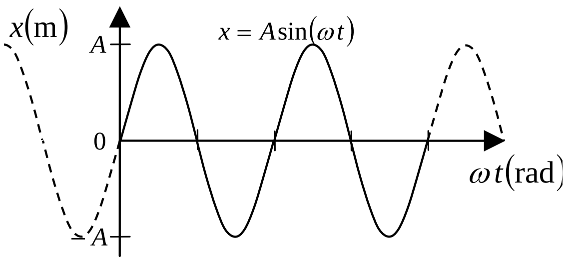


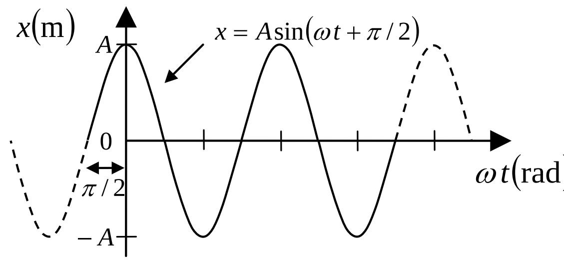
Constante de phase ϕ :

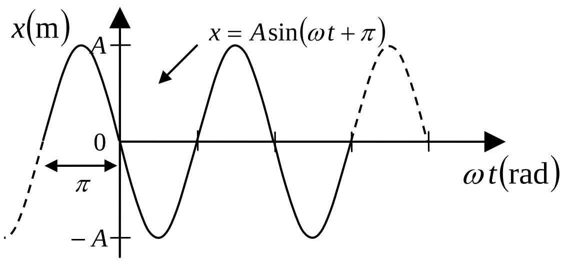
La constante de phase joue le rôle de condition initiale sur la position à $t = 0$. On utilise la constante de phase pour ajuster l'argument de la fonction sinus afin de bien faire correspondre x_0 et v_{x0} à $t = 0$.

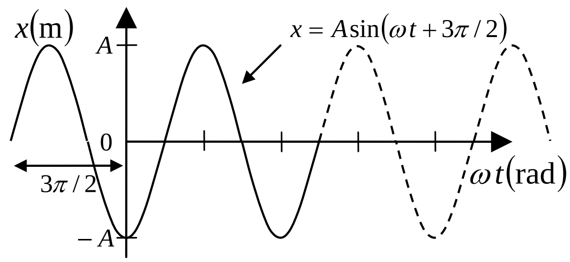


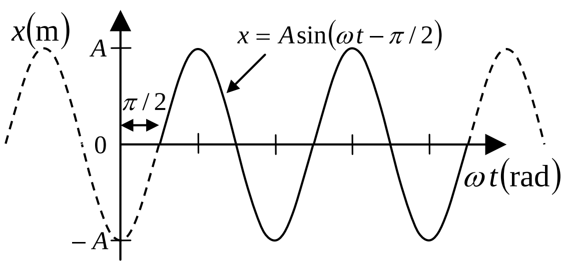
Ex :

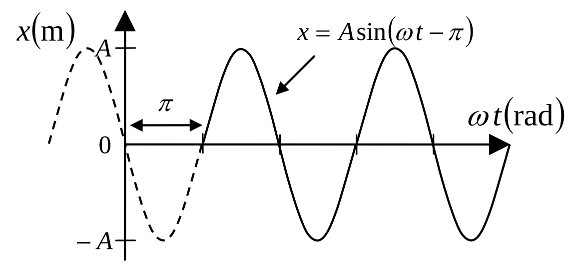






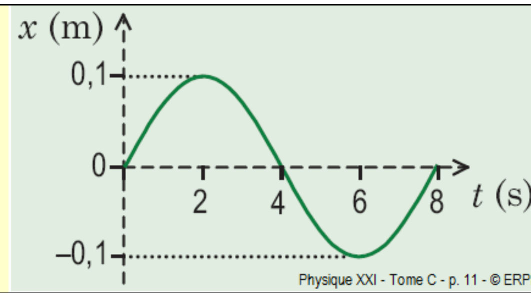






Situation 1 : *Du graphique à l'équation.* Dans un système bloc-ressort, la position du bloc est donnée par le graphique ci-contre. On désire déterminer la valeur des paramètres qui permettent de décrire le mouvement du bloc à l'aide de la fonction

$$x = A\sin(\omega t).$$



À partir du graphique, on peut lire l'amplitude et la période de l'oscillation :

$$A = 0{,}1 \text{ m} \qquad \text{et} \qquad T = 8 \text{ s}$$

On peut maintenant évaluer la fréquence angulaire :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{(8)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}}$$

Nous avons ainsi l'équation du mouvement suivante :

$$x = A\sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0{,}1\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)}$$

Situation 2 : *De l'équation au graphique.* La position d'un mobile en fonction du temps est donnée par l'équation

$$x = 0{,}5\sin(0{,}982\,t + 3\pi/2)$$

où x est en mètres, t est en secondes et la phase du sinus (la parenthèse) est en radians. On désire tracer le graphique $x(t)$ pour $0 \le t \le 10$ s.

À partir de l'équation, nous pouvons définir l'amplitude, la fréquence angulaire et la constante de phase :

$$A = 0{,}5 \text{ m} \qquad \omega = 0{,}982 \text{ rad/s} \qquad \phi = 3\pi/2$$

Nous pouvons évaluer maintenant la période de l'oscillation :

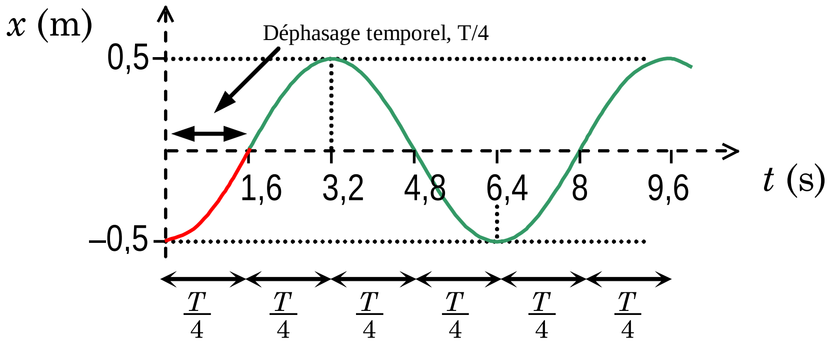
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{(0{,}982)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 6{,}4 \text{ s}}$$

Évaluons la position à $t = 0$:

$$x = 0{,}5\sin(0{,}982(0) + 3\pi/2) \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}5\sin(3\pi/2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = -0{,}5 \text{ m}}$$

Ainsi, nous pouvons représenter cette fonction grâce au graphique suivant : ($\frac{T}{4} = 1{,}6 \;\; s$)



Remarque : Un déphasage de $\phi = 3\pi/2$ est équivalent à un déphasage de $\phi = -\pi/2$