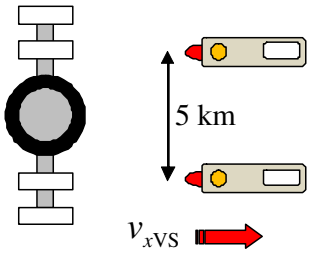
Problème de révision : La croisière spatiale

Deux vaisseaux spatiaux voyageant l'un à côté de l'autre séparés par une distance de 5 km passent devant une station orbitale avec une vitesse relative de 0,2 c par rapport à la station orbitale en direction d'une planète tropicale. Au moment où les deux vaisseaux croisent la station orbitale, les horloges internes des deux vaisseaux se synchronisent avec l'horloge de la station orbitale.



La station orbitale utilise un télescope de 10 m de diamètre pour observer le déplacement des deux vaisseaux de croisière. À l'arrière de chaque vaisseau se trouve un phare orange très lumineux qui émet de la lumière à 600 nm.

(a) Dans le référentiel de la station orbitale, à quelle distance de la station orbitale se trouve la position limite pour laquelle le télescope n'est plus capable de distinguer les deux phares des deux vaisseaux ?

(b) Au moment où les deux vaisseaux se trouvent à la position indiquée en **(a)**, quelle est la distance entre la station orbitale et les vaisseaux, dans le référentiel des vaisseaux ?

(c) Au moment où les deux vaisseaux se trouvent à la position indiquée en **(a)**, quel est le temps indiqué par les horloges des vaisseaux, dans le référentiel des vaisseaux ?

(d) Dans le référentiel des vaisseaux, quelle est la distance entre les vaisseaux et la station orbitale lorsque le télescope de la station orbitale reçoit la lumière émise par les vaisseaux ayant occupé la position indiquée en **(a)** ?

(e) Dans le référentiel des vaisseaux, quel est le temps indiqué par les horloges des vaisseaux lorsque le télescope de la station orbitale reçoit la lumière émise par les vaisseaux ayant occupé la position indiquée en **(a)** ?

Solution : La croisière spatiale

Nous avons deux référentiels à utiliser dans cette situation :

Référentiel **S** : Station orbitale
Référentiel **V** : Vaisseaux

La vitesse relative v entre nos deux référentiels est la suivante :

$$v_{VS} = 0{,}2\,c \qquad\qquad v_{SV} = -0{,}2\,c$$

(Vitesse relative de V par rapport à S) (Vitesse relative de S par rapport à V)

Notre situation comporte deux événements :

E1 : Les vaisseaux quittent la station orbitale.
E2 : Les vaisseaux atteignent la position limite (vaisseaux non discernables).
E3 : La station orbitale capte l'information sur la position limite des vaisseaux.

Évaluons notre facteur gamma :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}2c}{c}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = 1{,}0206}$$

Les mesures associées à l'événement **E1** sont les suivantes :

Référentiel **S**

$x_{S(1)} = 0 \qquad t_{S(1)} = 0$

Référentiel **V**

$x_{V(1)} = 0 \qquad t_{V(1)} = 0$

Évaluons la fréquence de la lumière émise par les vaisseaux par rapport aux vaisseaux :

$$\lambda = cT \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{f}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{c}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{\left(3\times10^{8}\right)}{\left(600\times10^{-9}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_V = 5\times10^{14}\,\text{Hz}}$$

Puisque les vaisseaux s'éloignent de la station orbitale avec une vitesse relative $v_{x\mathrm{VS}} = 0{,}2c$, la fréquence émise par les vaisseaux sera influencée par l'effet Doppler lumineux :

$$f_{\mathrm{B}} = \frac{\sqrt{c \pm v}}{\sqrt{c \mp v}} f_{\mathrm{A}} \qquad \Rightarrow \qquad (f_{\mathrm{S}}) = \frac{\sqrt{c - v}}{\sqrt{c + v}} (f_{\mathrm{V}})$$

$$\Rightarrow \qquad f_{\mathrm{S}} = \frac{\sqrt{c - (0{,}2c)}}{\sqrt{c + (0{,}2c)}} f_{\mathrm{V}}$$

$$\Rightarrow \qquad f_{\mathrm{S}} = \frac{\sqrt{0{,}8}}{\sqrt{1{,}2}} (5 \times 10^{14})$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{f_{\mathrm{S}} = 4{,}082 \times 10^{14}\ \mathrm{Hz}}$$

Évaluons la longueur d'onde de la lumière captée par la station orbitale :

$$\lambda = \frac{c}{f} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{(3 \times 10^{8})}{(4{,}082 \times 10^{14})}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\lambda_S = 734\ \mathrm{nm}}$$

Évaluons l'angle limite de résolution du télescope selon le critère de Rayleigh dans le référentiel de la station orbitale à l'aide de l'équation à ouverture circulaire :

$$\alpha_{\mathrm{lim}} = 1{,}22 \frac{\lambda}{D} \quad \Rightarrow \qquad \alpha_{\mathrm{lim}} = 1{,}22 \frac{(734 \times 10^{-9})}{(10)}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\alpha_{\mathrm{lim}} = 8{,}955 \times 10^{-8}\ \mathrm{rad}}$$

Évaluons la position limite x_{lim} sachant que les deux objets observés sont séparés par une distance de 5 km. Cette position correspond à l'événement **E2** :

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x_{\mathrm{lim}}} \quad \Rightarrow \qquad x_{\mathrm{lim}} = \frac{y}{\tan(\theta)}$$

$$\Rightarrow \qquad x_{\mathrm{lim}} = \frac{(5 \times 10^{3})}{\tan(8{,}955 \times 10^{-8})}$$

$$\Rightarrow \qquad x_{\mathrm{lim}} = 5{,}583 \times 10^{10}\ \mathrm{m}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{x_{S(2)} = 5{,}583 \times 10^{10}\ \mathrm{m}} \qquad \textbf{(a)}$$

Dans le référentiel de la station orbitale (**S**), il faudra le temps suivant avant que les deux vaisseaux atteignent la position limite. Ce temps correspond à l'événement **E2** :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow \quad (x_{\lim}) = (0) + (0{,}2\,c)t + \frac{1}{2}(0)t^2$$

$$\Rightarrow \quad (5{,}583\times10^{10}) = (0{,}2\,c)t$$

$$\Rightarrow \quad t = 930{,}5 \ \ s$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_{S(2)} = 930{,}5 \ \ \text{s}}$$

Dans le référentiel de la station orbitale (**S**), les deux événements **E1** et **E2** sont situés à **deux endroits différents**. La distance est une longueur propre L_0 et le temps est un intervalle de temps impropre :

<u>Distance :</u> $L_S = x_{S(2)} - x_{S(1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_S = 5{,}583\times10^{10}\,\text{m}}$

<u>Durée :</u> $T_S = t_{S(2)} - t_{S(1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_S = 930{,}5 \ \ \text{s}}$

Dans le référentiel des deux vaisseaux (**V**), les deux événements **E1** et **E2** sont situés **aux mêmes endroits**. La distance est une longueur impropre et le temps est un intervalle de temps propre T_0 :

<u>Distance :</u> $L = \dfrac{L_0}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad (L_V) = \dfrac{(L_S)}{\gamma}$

$$\Rightarrow \quad L_V = \frac{(5{,}583\times10^{10})}{(1{,}0206)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_V = 5{,}47\times10^{10}\,\text{m}} \quad \textbf{(b)}$$

<u>Durée :</u> $T = \gamma T_0 \quad \Rightarrow \quad (T_S) = \gamma(T_V)$

$$\Rightarrow \quad (930{,}5) = (1{,}0206)T_V$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_V = 911{,}7 \ \ \text{s}} \quad \textbf{(c)}$$

Pour répondre à la question **(d)** et **(e)** il faut ajouter le temps que doit prendre la lumière pour retourner à la station orbitale et ainsi apporter l'information au télescope sur la position des vaisseaux :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow \quad (x_{S(3)}) = (x_{S(2)}) + (-c)t + \frac{1}{2}(0)t^2$$

$$\Rightarrow \quad (0) = (5{,}583\times10^{10}) + (-c)t \qquad (x_{S(3)} = x_{S(1)} = 0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 186{,}1 \text{ s}}$$

Puisque la valeur de temps obtenue est l'intervalle de temps entre l'événement E2 et l'événement E3, nous avons les informations sur l'événement E3 par rapport au référentiel de la station orbitale :

$$t_{S(3)} = t_{S(2)} + t \quad \Rightarrow \quad t_{S(3)} = (930{,}5) + (186{,}1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_{S(3)} = 1116{,}6 \text{ s}}$$

Dans le référentiel de la station orbitale (**S**), les deux événements **E1 et E3** sont situés **aux mêmes endroits**. Le temps est un intervalle de temps propre T_0 :

<u>Durée :</u> $T_S = t_{S(3)} - t_{S(1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_S = 1116{,}6 \text{ s}}$

<u>Distance :</u> $\Delta x = v\Delta t \quad \Rightarrow \quad (L_S) = v(T_S)$

$$\Rightarrow \quad L_S = (0{,}2c)(1116{,}6)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_S = 6{,}700\times10^{10} \text{ m}}$$

Dans le référentiel des deux vaisseaux (**V**), les deux événements **E1 et E3** sont situés à **deux endroits différents**. La distance est une longueur propre L_0 et le temps est un intervalle de temps impropre :

<u>Distance :</u> $L = \dfrac{L_0}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad (L_S) = \dfrac{(L_V)}{\gamma}$

$$\Rightarrow \quad (6{,}70\times10^{10}) = \frac{L_V}{(1{,}0206)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_V = 6{,}838\times10^{10} \text{ m}} \quad \textbf{(d)}$$

<u>Durée :</u> $T = \gamma T_0 \quad \Rightarrow \quad (T_V) = \gamma(T_S)$

$$\Rightarrow \quad T_V = (1{,}0206)(1116{,}6)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_V = 1139{,}6 \text{ s}} \quad \textbf{(e)}$$

Voici un tableau récapitulatif des événements :

Référentiel	Mesure	Événement **E1** à **E2**	Événement **E2** à **E3**	Événement **E1** à **E3**
S	Δx_S	$5{,}583\times10^{10}$ m	$-5{,}583\times10^{10}$ m	0
	Δt_S	930,5 s	186,1 s	1116,6 s (temps propre)
	L_S	$5{,}583\times10^{10}$ m (longueur propre)	$5{,}583\times10^{10}$ m	$6{,}700\times10^{10}$ m
V	Δx_V	0	?	$6{,}838\times10^{10}$ m
	Δt_V	911,7 s (temps propre)	?	1139,6 s
	L_V	$5{,}47\times10^{10}$ m	?	$6{,}838\times10^{10}$ m (longueur propre)

Pourquoi le temps écoulé entre l'événement **E1** et **E3** dans le référentiel V est plus grand que dans le référentiel S ?

<u>Réponse :</u>

Dans le référentiel V, la station orbitale est en mouvement à vitesse $v_{x\mathrm{SV}} = -0{,}2c$. Puisque les vaisseaux envoient un signal lumineux de positionnement vers la station orbitale qui recule par rapport aux vaisseaux, le signal devra parcourir la distance $5{,}47\times10^{10}$ m plus une distance supplémentaire causée par le recul de la station orbitale attendant l'arrivé du signal lumineux. Ce problème de poursuite augment le temps de parcours de la lumière ainsi que la distance selon V.

Avec la transformation de Lorentz entre l'événement **E2** et **E3** de S vers V, on peut obtenir le temps à ajouter à la cinématique de la lumière dans le référentiel V :

$$\Delta t_V = \gamma_{\mathrm{SV}}\left(\Delta t_S + \frac{v_{x\mathrm{SV}}\Delta x_S}{c^2}\right) \quad\Rightarrow\quad \Delta t_V = (1{,}0206)\left((186{,}1) + \frac{(-0{,}2c)(-5{,}583\times10^{10})}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \Delta t_V = 227{,}92 \text{ s}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\Delta t_{V(2\to3)} = 227{,}92 \text{ s}}$$

et

$$\Delta t_{V(1\to3)} = \Delta t_{V(1\to2)} + \Delta t_{V(2\to3)} \quad\Rightarrow\quad \Delta t_{V(1\to3)} = (911{,}7) + (227{,}92)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\Delta t_{V(1\to3)} = 1139{,}6 \text{ s}}$$