Problème de révision : Armageddon, encore une fois

Encore une fois, la Terre est sous la menace d'un astéroïde fonçant vers la Terre avec une vitesse relative de 0,1 *c* par rapport à la Terre. Afin de détruire l'astéroïde, deux vaisseaux se déplacent en direction de l'astéroïde avec une vitesse relative de 0,2 *c* par rapport à la Terre. Ces deux vaisseaux se suivant un derrière l'autre sont séparés par une distance de 10 000 km par rapport aux deux vaisseaux. Lorsque le vaisseau de queue passe devant la Terre, il synchronise son horloge interne avec celui de la Terre et synchronise par la suite l'horloge du vaisseau de tête à l'aide d'une communication radio. Lorsque l'horloge du vaisseau de tête indique 3 s, le vaisseau de tête lance un missile avec une vitesse relative de 0,3 *c* par rapport aux vaisseaux dans la direction de l'astéroïde. Par rapport à la Terre, où sera effectué l'impact entre le missile et l'astéroïde sachant que l'astéroïde était à une distance de 1×10^{9} m de la Terre (par rapport à la Terre) lorsque le vaisseau de queue s'est synchronisé avec la Terre.

Solution : Armageddon, encore une fois

Nous avons quatre référentiels dans l'étude de cette situation :

Référentiel **A** : L'astéroïde
Référentiel **T** : La Terre
Référentiel **V** : Les deux vaisseaux
Référentiel **M** : Missile

Nous avons les vitesses relatives suivantes :

$v_{\mathrm{AT}} = -0{,}1c$ (Vitesse relative de l'astéroïde par rapport à la Terre)

$v_{\mathrm{VT}} = 0{,}2\,c$ (Vitesse relative des vaisseaux par rapport à la Terre)

$v_{\mathrm{MV}} = 0{,}3c$ (Vitesse relative du missile par rapport aux vaisseaux)

Notre situation peut s'étudier à l'aide de deux événements :

Événement **E1** : Lancement du missile par le vaisseau de tête.
Événement **E2** : Collision entre le missile et l'astéroïde.

Effectuons la mesure de l'événement **E1** dans le référentiel des deux vaisseaux (V) : (l'arrière du vaisseau correspond à la coordonnée $x_V = 0$ en raison de notre choix de synchronisation)

Événement **E1** : Référentiel **V**	
Position	Temps
$x_{V(1)} = 10000\,\mathrm{km} = 1\times 10^7\,\mathrm{m}$	$t_{V(1)} = 3\ \mathrm{s}$

Effectuons la transformation le l'événement **E1** mesuré dans le référentiel des deux vaisseaux (**V**) vers le référentiel de la Terre (**T**) :

Facteur gamma : $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v_{\mathrm{VT}}^2 / c^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (0{,}2\,c)^2 / c^2}}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\gamma = 1{,}0206}$

Avec : $x_{\mathrm{B}} = \gamma\left(x_{\mathrm{A}} + v_{\mathrm{AB}} t_{\mathrm{A}}\right)$ et $t_{\mathrm{B}} = \gamma\left(t_{\mathrm{A}} + \dfrac{x_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{AB}}}{c^2}\right)$

Événement **E1** : Référentiel **T**	
Position	Temps
$x_{\mathrm{T(1)}} = \gamma\left(x_{\mathrm{V(1)}} + v_{\mathrm{VT}}\, t_{\mathrm{V(1)}}\right)$ $= (1{,}0206)\left(\left(1\times 10^7\right) + (0{,}2\,c)(3)\right)$ $= 1{,}939 \times 10^8\,\mathrm{m}$	$t_{\mathrm{T(1)}} = \gamma\left(t_{\mathrm{V(1)}} + \dfrac{x_{\mathrm{V(1)}} v_{\mathrm{VT}}}{c^2}\right)$ $= (1{,}0206)\left((3) + \dfrac{\left(1\times 10^7\right)(0{,}2\,c)}{c^2}\right)$ $= 3{,}0685\ \mathrm{s}$

Évaluons la vitesse relative du missile par rapport à la Terre avec la transformation relativiste des vitesses :

$$v_{x\mathrm{AR}} = \frac{v_{x\mathrm{AB}} + v_{x\mathrm{BR}}}{1 + \left(\dfrac{v_{x\mathrm{AB}}}{c}\right)\left(\dfrac{v_{x\mathrm{BR}}}{c}\right)} \quad \Rightarrow \quad v_{x\mathrm{MT}} = \frac{v_{x\mathrm{MV}} + v_{x\mathrm{VT}}}{1 + \left(\dfrac{v_{x\mathrm{MV}}}{c}\right)\left(\dfrac{v_{x\mathrm{VT}}}{c}\right)}$$ (Remplacer les indices)

$$\Rightarrow \quad v_{x\mathrm{MT}} = \frac{(0{,}3\,c) + (0{,}2\,c)}{1 + \left(\dfrac{(0{,}3\,c)}{c}\right)\left(\dfrac{(0{,}2\,c)}{c}\right)}$$ (Remplacer les vitesses)

$$\Rightarrow \quad v_{x\mathrm{MT}} = \frac{0{,}5\,c}{1 + (0{,}3)(0{,}2)}$$ (Simplification)

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x\mathrm{MT}} = 0{,}4717\,c}$$

Avant le lancement du missile, l'astéroïde s'est approché de la Terre pour occuper la position suivante :

$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad x = \left(1\times 10^9\right) + (-0{,}1\,c)(3{,}0685) + \frac{1}{2}(0)(3{,}0685)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 9{,}079 \times 10^8\,\mathrm{m}}$$

Dans le référentiel de la Terre, nous avons les informations suivantes à $t_{\mathrm{T}(1)} = 3{,}0685\ \mathrm{s}$:

Temps	$t = 3{,}0685\ \mathrm{s}$
Position missile	$x_{missile} = 1{,}939 \times 10^8\ \mathrm{m}$
Vitesse du missile	$v_{missile} = 0{,}4717\, c$
Position astéroïde	$x_{astéroïde} = 9{,}079 \times 10^8\ \mathrm{m}$
Vitesse de l'astéroïde	$v_{astéroïde} = -0{,}1 c$

À l'aide de deux équations du mouvement pour le missile et pour l'astéroïde, établissons le temps requis pour réaliser la collision. La collision aura lieu à un endroit commun pour les deux objets :

Avec $x = x_0 + v_{x0} t$:

Missile : $x = \left(1{,}939 \times 10^8\right) + \left(0{,}4717\, c\right) t$

Astéroïde : $x = \left(9{,}079 \times 10^8\right) + \left(-\,0{,}1\ c\right) t$

Égalité des positions:

$$1{,}939 \times 10^8 + 0{,}471 c\, t = 9{,}079 \times 10^8 - 0{,}1 c\, t \quad \Rightarrow \quad 0{,}571 c\, t = 7{,}140 \times 10^8$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 4{,}168\ \mathrm{s}}$$

Nous pouvons alors évaluer la position de l'impact grâce à l'équation du mouvement du missile :

$$x = x_0 + v_{x0} t \quad \Rightarrow \quad x = \left(1{,}939 \times 10^8\right) + \left(0{,}4717\, c\right) t$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(1{,}939 \times 10^8\right) + \left(0{,}4717\, c\right)\left(4{,}168\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 7{,}837 \times 10^8\ \mathrm{m}} \qquad \text{(position de l'impact)}$$