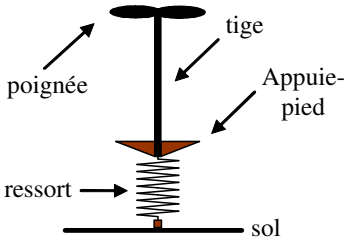
Problème de révision : *Pogo stick*

Un *pogo stick* de 10 kg repose verticalement contre le sol. Il est constitué d'un ressort de 30 cm de long au repos dont la constante est égale à 9800 N/m. L'appuie-pieds est fixé à l'extrémité supérieure du ressort et l'extrémité inférieure du ressort repose contre le sol. La tige est fixée à l'appuie-pied.



Béatrice (70 kg) se laisse tomber d'une hauteur de 40 cm par rapport au sol sur le *pogo stick*.

a) Par rapport au sol, quelle est la position la plus basse et la plus haute atteinte par les pieds de Béatrice après le contact de Béatrice avec le *pogo stick*.

b) Combien de temps s'écoule entre le moment où Béatrice effectue sa chute vers le *pogo stick* et le moment où le *pogo stick* décolle du sol grâce au rebond.

N.B. Un « vrai » *pogo stick* ne possède pas un ressort situé au même endroit que dans la description précédente. Cette modification fut apportée pour simplifier la situation.

Solution : *Pogo stick*

Évaluons la compression du ressort à l'équilibre <u>sans</u> Béatrice :

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad ke - mg = 0$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{(10)(9{,}8)}{(9800)}$$ (où m correspond à la masse du *pogo stick*)

$$\Rightarrow \quad e = 0{,}01 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{e_{\text{P}} = 0{,}01 \text{ m}}$$ (Compression avec masse du *pogo stick*)

Évaluons la position de l'appuie-pieds du *pogo stick* par rapport au sol lorsque le celui-ci est au repos sans Béatrice :

$$y_{\text{éq sans Béatrice}} = L_0 - e_{\text{P}} \quad \Rightarrow \quad y_{\text{éq sans Béatrice}} = (0{,}30) - (0{,}01)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_{\text{éq sans Béatrice}} = 0{,}29 \text{ m}}$$

À l'aide des équations du MUA et de la chute libre, nous pouvons évaluer le temps requis afin que Béatrice atteigne l'appuie-pieds du *pogo stick* :

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad \Rightarrow \quad (0{,}29) = (0{,}40) + (0)t + \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2$$

$$\Rightarrow \quad t^2 = 0{,}02245 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 0{,}1498 \text{ s}}$$ (Prendre le temps positif)

Évaluons la vitesse de Béatrice lorsqu'elle entre en contact avec l'appuie-pieds du *pogo stick* :

$$v_y = v_{y0} + a_y t \quad \Rightarrow \quad v_y = (0) + (-9{,}8)(0{,}1498)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_y = -1{,}468 \text{ m/s}}$$

Lorsque Béatrice entre en contact avec l'appuie-pied du *pogo stick*, il y aura collision à calculer avec la conservation de la quantité de mouvement, car le *pogo stick* n'a pas une masse négligeable :

$$\sum p_{yf} = \sum p_{yi} \quad \Rightarrow \quad (m_{\text{pogo}} + m_{\text{Béatrice}})v_{yf} = m_{\text{Béatrice}}v_{yi}$$

$$\Rightarrow \quad ((10) + (70))v_{yf} = (70)(-1{,}468)$$

$$\Rightarrow \quad v_{yf} = -1{,}2845 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{y(collision)} = -1{,}2845 \text{ m/s}}$$

Évaluons la compression du ressort à l'équilibre <u>avec</u> Béatrice :

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad ke - mg = 0$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{(10+70)(9{,}8)}{(9800)}$$ (où m est la masse du *pogo stick* et Béatrice)

$$\Rightarrow \quad e = 0{,}08 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{e_{\text{P+B}} = 0{,}08 \text{ m}}$$

Évaluons la position d'équilibre du ressort avec Béatrice par rapport au sol :

$$y_{\text{éq}} = L_0 - e_{\text{P+B}} \quad \Rightarrow \quad y_{\text{éq}} = (0{,}30) - (0{,}08)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_{\text{éq}} = 0{,}22 \text{ m}}$$

N.B. Lorsque Béatrice oscillera sur le *pogo stick*, la position de ses pieds sera à l'équilibre à 12 cm du sol.

Évaluons la position verticale des pieds de Béatrice par rapport au point d'équilibre <u>avec</u> Béatrice au moment de la collision. Dans ce nouveau système d'axe, la position d'équilibre <u>avec</u> Béatrice correspond à la position $y = 0$:

$$y_{\text{collision}} = y_{\text{eq sans Béatrice}} - y_{\text{eq}} \quad \Rightarrow \quad y_{\text{collision}} = (0{,}29) - (0{,}22)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_{\text{collision}} = 0{,}07 \text{ m}}$$

Évaluons l'énergie du système après la collision avec la convention $x = y = 0$ à l'équilibre. À cette étape, on peut considérer la masse du *pogo stick* et la masse de Béatrice comme une seule masse de $70 + 10 = 80$ kg. Pour évaluer l'énergie gravitationnelle, nous utilisons le $y_{\text{collision}} = 0{,}07$ m, car il respecte notre convention $y = 0$ à l'équilibre et utilisons la vitesse $v_{y(collision)} = -1{,}2845$ m/s après la collision :

$$E = K + U_g + U_r \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}ke^2$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}(80)(-1{,}2845)^2 + (80)(9{,}8)(0{,}07) + \frac{1}{2}(9800)(0{,}08)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = 152{,}24 \text{ J}}$$

À partir de l'énergie du système, évaluons l'amplitude des oscillations du MHS :

$$E = \frac{1}{2}k\left(A^2 + L^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2E}{k} = A^2 + L^2$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = \frac{2E}{k} - L^2$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = \frac{2(154{,}24)}{(9800)} - (0{,}08)^2$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = 0{,}02508$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = 0{,}1584 \ \text{m}}$$

Évaluons la fréquence angulaire du MHS :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(9800)}{(80)}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 11{,}07 \ \text{rad/s}}$$

Écrivons l'équation du mouvement harmonique simple de la position du *pogo stick* :

$$x = A\sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}1584\sin(11{,}07t + \phi)$$

Évaluons notre constante de phase tel que $t = 0{,}1498 \ s$ correspond au moment où Béatrice entre en contact avec le *pogo stick* :

$$x = y_{collision} = 0{,}07 \ \text{m}$$

$$v_x = v_{y(collision)} = -1{,}2845 \ \text{m/s}$$

$$x = 0{,}1584\sin(11{,}07t + \phi) \quad \Rightarrow \quad (0{,}07) = 0{,}1584\sin(11{,}07(0{,}1498) + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}4419 = \sin(1{,}658 + \phi)$$

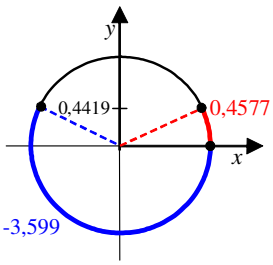
$$\Rightarrow \quad 1{,}658 + \phi = \sin^{-1}(0{,}4419)$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}658 + \phi = \{\ldots, -3{,}599, 0{,}4577, \ldots\}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}658 + \phi = -3{,}599 \ \text{(vitesse négative)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi = -5{,}257 \ \text{rad}}$$

<u>P.S.</u> Calculatrice : $1{,}658 + \phi = 0{,}4577 \ \text{rad}$



Notre équation de la position du MHS aura la forme suivante :

$$\boxed{x = 0{,}1584\sin(11{,}07t - 5{,}257)}$$

À la position la plus basse, le mouvement harmonique simple donne une position de – A :

$$x_{\min} = -A = -0{,}1584 \ \text{m}$$

Par rapport au sol, cette position est égale à la valeur suivante :

$$y_{\min} = y_{\text{eq}} + x_{\min} \quad \Rightarrow \quad y_{\min} = y_{\text{eq}} + x_{\min}$$

$$\Rightarrow \quad y_{\min} = (0{,}22) + (-0{,}1584)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_{\min} = 0{,}0616 \text{ m}} \qquad \textbf{(a), partie 1}$$

Pour évaluer la position la plus élevée, il faut remarquer qu'il y aura un rebond avec une masse supplémentaire, car le *pogo stick* quittera le contact du sol avec Béatrice. À partir de l'énergie du système **après** la collision (car il y a une perte d'énergie cinétique occasionnée par la collision parfaitement inélastique), évaluons la hauteur maximale. Prenons comme convention $y = 0$ au niveau du sol et n'oublions pas que le ressort est comprimé de $e_{\text{P}} = 0{,}01$ m lorsque Béatrice tombe sur celui-ci :

$$E_f = E_i \quad \Rightarrow \quad K_f + U_{gf} + U_{rf} = K_i + U_{gi} + U_{ri}$$

$$\Rightarrow \quad U_{gf} = K_f + U_{gf} + U_{ri}$$

$$\Rightarrow \quad mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^{\,2} + mgy_i + \frac{1}{2}ke_i^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad mgy_f = \frac{1}{2}mv_{y(collision)}^{\,2} + mg\left(y_{\text{eq sans Béatrice}}\right) + \frac{1}{2}ke_{\text{P}}^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad y_f = \frac{1}{2g}v_{y(collision)}^{\,2} + y_{\text{eq sans Béatrice}} + \frac{1}{2mg}ke_{\text{P}}^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad y_f = \frac{1}{2(9{,}8)}(-1{,}2845)^2 + (0{,}29) + \frac{1}{2(80)(9{,}8)}(9800)(0{,}01)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_f = 0{,}3748 \text{ m}} \qquad \textbf{(a), partie 2}$$

Évaluons le temps avant que le *pogo stick* quitte le sol à partir de la chute de Béatrice. Celui-ci quittera le contact avec le sol lorsque le ressort ne sera plus comprimé. À l'équilibre, le ressort est comprimé de 0,08 m. Évaluons le temps pour atteindre la position $x = 0{,}08$ pour la première fois lorsque la vitesse est positive :

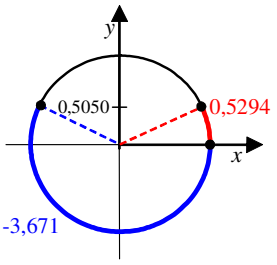
$$x = 0{,}1584\sin(11{,}07t - 5{,}257)$$

$$\Rightarrow \quad (0{,}08) = 0{,}1584\sin(11{,}07t - 5{,}257)$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}5050 = \sin(11{,}07t - 5{,}257)$$

$$\Rightarrow \quad 11{,}07t - 5{,}257 = \sin^{-1}(0{,}5050)$$

$$\Rightarrow \quad 11{,}07t - 5{,}257 = \{\ldots, -3{,}671,\ 0{,}5294, \ldots\}$$

$$\Rightarrow \quad 11{,}07t - 5{,}257 = 0{,}5294 \qquad \text{(vitesse positive)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 0{,}5227 \text{ s}} \quad \textbf{(b)}$$