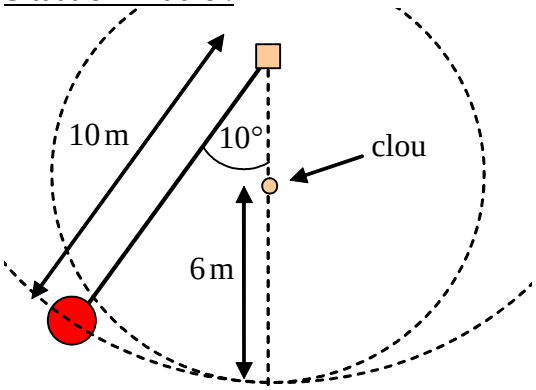
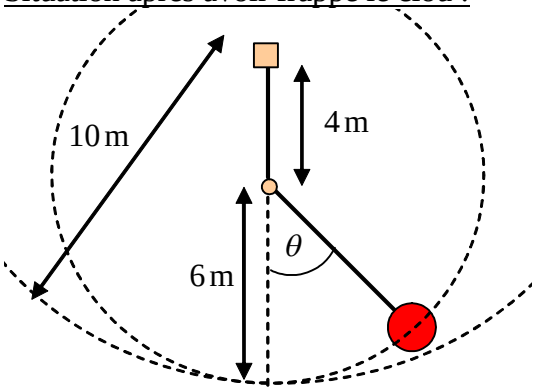
Problème de révision : Le pendule raccourci

Un pendule de 5 kg est initialement incliné à 10° par rapport à la verticale à l'aide d'une corde de 10 m. À $t = 0$, on lâche le pendule. Lorsque le pendule atteint la verticale, la corde intercepte un clou forçant le pendule à continuer sa trajectoire sur un rayon de 6 m. Évaluez **(a)** l'angle d'élévation en degré par rapport à la verticale du pendule à 2 secondes et **(b)** la vitesse du pendule en m/s à 2 secondes.

Situation initiale :



Situation après avoir frappé le clou :



Solution : Le pendule raccourci

Évaluons la fréquence angulaire des deux mouvements avec : $\omega_0 = \sqrt{g/L}$

<u>Mouvement #1 :</u> $\omega_{0(1)} = \sqrt{\dfrac{(9{,}8)}{(10)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_{0(1)} = 0{,}990 \text{ rad/s}}$

<u>Mouvement #2 :</u> $\omega_{0(2)} = \sqrt{\dfrac{(9{,}8)}{(6)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_{0(2)} = 1{,}278 \text{ rad/s}}$

Nous pouvons évaluer la période des deux mouvements avec : $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ ou $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

<u>Mouvement #1 :</u> $T_{0(1)} = \dfrac{2\pi}{(0{,}990)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_{0(1)} = 6{,}347 \text{ s}}$

<u>Mouvement #2 :</u> $T_{0(2)} = \dfrac{2\pi}{(1{,}278)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_{0(2)} = 4{,}916 \text{ s}}$

Puisque le mouvement #1 change pour le mouvement #2 après ¼ de période, évaluons le temps requis pour passer du mouvement #1 au mouvement #2 :

$$t_{1\to 2} = \frac{T_{0(1)}}{4} \quad \Rightarrow \quad t_{1\to 2} = \frac{(6{,}347)}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{1\to 2} = 1{,}587 \text{ s}}$$

Puisque le mouvement #2 peut à nouveau retourner au mouvement #1 après ½ période, évaluons le temps requis pour passer du mouvement #2 au mouvement #1 :

$$t_{2\to 1} = \frac{T_{0(2)}}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{2\to 1} = \frac{(4{,}916)}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{2\to 1} = 2{,}458 \text{ s}}$$

Puisque nous cherchons de l'information sur le mouvement global à 2 secondes, ceci se passera durant le mouvement #2, car :

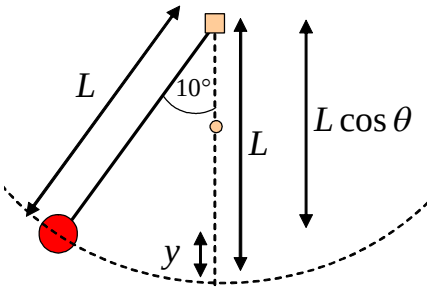
$$t_{1\to 2} < 2 \qquad \text{et} \qquad t_{1\to 2} + t_{2\to 1} = 4{,}045 > 2$$

Évaluons la hauteur du pendule par rapport à son point le plus bas lorsque l'angle d'élévation du pendule est égal à 10° :

$$y = L - L\cos\theta \quad \Rightarrow \quad y = L(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad y = (10)(1-\cos(10°))$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = 0{,}1519 \text{ m}}$$



Avec la conservation de l'énergie, évaluons la vitesse du pendule à son point le plus bas :

$E_f = E_i + W_{nc}$ $\Rightarrow$ $K_f = U_{gi}$ ($W_{nc} = 0$, $U_{gf} = 0$, $K_i = 0$)

$\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{2}mv_f^{\ 2}\right) = (mgy_i)$ (Remplacer K_f et U_{gi})

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}v_f^{\ 2} = gy_i$ (Simplifier *m*)

$\Rightarrow$ $v_f = \sqrt{2gy_i}$ (Isoler *v*)

$\Rightarrow$ $v_f = \sqrt{2(9{,}8)(0{,}1519)}$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow$ $\boxed{v = 1{,}726 \text{ m/s}}$ (Vitesse maximale, point le plus bas)

Puisque nous avons la vitesse maximale, évaluons l'amplitude du mouvement #2 grâce à la relation $v_{\max} = A\omega$:

$v_{\max} = A\omega$ $\Rightarrow$ $A = \frac{v_{\max}}{\omega}$

$\Rightarrow$ $A = \frac{(1{,}724)}{(1{,}278)}$

$\Rightarrow$ $\boxed{A = 1{,}347 \text{ m}}$ (Amplitude maximum de 12,86°)

Nous pouvons maintenant écrire l'équation de la position du mouvement #2 à l'aide de la fonction sinus et d'une constante de phase $\phi = 0$. Cette équation réinitialise le chronomètre à *t = 0*. Ainsi, cette équation débute après le mouvement #1 ayant durée 1,587 s :

$x = A\sin(\omega t + \phi)$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = 1{,}347\sin(1{,}278t)}$

Nous pouvons également écrire la fonction de la vitesse du mouvement #2 avec la valeur de la vitesse maximale et d'une constante de phase $\phi = 0$. Cette équation réinitialise le chronomètre à *t = 0*. Ainsi, cette équation débute après le mouvement #2 ayant durée 1,587 s :

$v_x = v_{\max}\cos(\omega t + \phi)$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_x = 1{,}726\cos(1{,}278t)}$

Puisque nous voulons la position à 2 secondes depuis le tout début, nous devons faire correspondre ce temps avec nos équations du mouvement #2. La correspondance est la suivante :

$t = 2$ s	$\leftrightarrow$	$t = 2 - t_{1\to 2} = 2 - 1{,}587 = 0{,}413$ s
(Temps réel)		(Temps dans éq. mouv. #2)

Évaluons la position du pendule à 2 secondes (0,413 s pour nos éq) :

$$x_{0,413} = 1{,}347\sin(1{,}278(0{,}413)) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x_{0,413} = 0{,}678 \text{ m}}$$

Cette position correspond à l'angle d'élévation suivant :

$$x = L\theta \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \frac{x}{L}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = \frac{(0{,}678)}{(6)}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = 0{,}113\,\text{rad} \times \frac{360°}{2\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\theta = 6{,}47°} \qquad \textbf{(a)}$$

Évaluons la vitesse à 2 secondes (0,413 s pour nos éq) :

$$v_{x0,413} = 1{,}726\cos(1{,}278(0{,}413)) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_{x0,413} = 1{,}49 \text{ m/s}} \qquad \textbf{(b)}$$