Problème de révision : Chute sur un ressort

Un bloc de 5 kg initialement immobile tombe d'une hauteur de 1,5 m sur un ressort vertical au repos fixé au sol dont la constante de rappel est égale à 120 N/m. Lorsque le bloc entre en contact avec le ressort, il demeure fixé au ressort. Évaluez la position du bloc par rapport au point de chute (position occupée avant de tomber) après un temps de 10 secondes. Le temps $t = 0$ correspond au moment où le bloc commence à tomber. Négligez la résistance de l'air.

Solution : Chute sur un ressort

À l'aide des équations du MUA et de la chute libre, nous pouvons évaluer le temps requis afin que le bloc atteigne le ressort :

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow \quad (-1{,}5) = (0) + (0)t + \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2$$

$$\Rightarrow \quad t^2 = 0{,}306 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 0{,}553 \text{ s}} \qquad \text{(Prendre le temps positif)}$$

Évaluons la vitesse du bloc lorsqu'il atteint le ressort :

$$v_y = v_{y0} + a_y t \quad \Rightarrow \quad v_y = (0) + (-9{,}8)(0{,}553)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_y = -5{,}419 \text{ m/s}}$$

Évaluons la compression du ressort à l'équilibre :

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad ke - mg = 0$$

$$\Rightarrow \quad k(L) - mg = 0$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{mg}{k} = \frac{(5)(9{,}8)}{(120)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L = 0{,}408 \text{ m}}$$

Évaluons la fréquence angulaire du mouvement harmonique simple du système masse-ressort :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(120)}{(5)}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 4{,}899 \text{ rad/s}}$$

Évaluons l'énergie totale du système lorsque la masse est initialement immobile en haut du ressort. Utilisons la convention $x = y = 0$ ce qui correspond à une hauteur $y = 0$ lorsque la masse est à l'équilibre :

$$E = K + U_g + U_r \quad \Rightarrow \quad E = U_g \qquad (e = 0 \text{ et } v = 0)$$

$$\Rightarrow \quad E = mgy$$

$$\Rightarrow \quad E = mg(1{,}5 + L)$$

$$\Rightarrow \quad E = (5)(9{,}8)(1{,}5 + 0{,}408)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = 93{,}49 \text{ J}}$$

À partir de l'énergie du système, évaluons l'amplitude des oscillations :

$$E = \frac{1}{2}k\left(A^2 + L^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2E}{k} = A^2 + L^2$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = \frac{2E}{k} - L^2$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = \frac{2(93{,}49)}{(120)} - (0{,}408)^2$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = 1{,}392$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = 1{,}180 \ \text{ m}}$$

Écrivons les équations du mouvement harmonique simple de notre système masse-ressort :

Position : $x = A\sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad x = (1{,}180)\sin(4{,}899t + \phi)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 1{,}180\sin(4{,}899t + \phi)}$$

Vitesse : $v_x = A\omega\cos(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad v_x = (1{,}180)(4{,}899)\cos(4{,}899t + \phi)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = 5{,}781\cos(4{,}899t + \phi)}$$

Évaluons notre constante de phase tel que $t = 0{,}553 \ \ s$ correspond au moment où le bloc touche le ressort. Nous avons :

$$x_{0{,}553} = L = 0{,}408 \ \text{ m}$$

$$v_{x\,0{,}553} = -5{,}419 \ \text{ m/s}$$

Équation de la position :

$$x = 1{,}179\sin(4{,}899t + \phi) \quad \Rightarrow \quad (0{,}408) = 1{,}180\sin(4{,}899(0{,}553) + \phi)$$

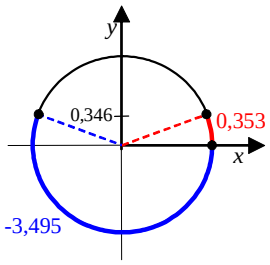
$$\Rightarrow \quad 0{,}346 = \sin(2{,}709 + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad 2{,}709 + \phi = \sin^{-1}(0{,}346)$$

$$\Rightarrow \quad 2{,}709 + \phi = \{\ldots, -3{,}495, \ 0{,}353, \ldots\}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \{\ldots, -6{,}204, \ -2{,}356, \ldots\}$$

<u>P.S.</u> Calculatrice : $2{,}709 + \phi = 0{,}353 \ \text{ rad}$



Essayons ces deux constantes de phase dans l'équation de la vitesse à afin de choisir la bonne :

Avec : $\phi = -6{,}204 \qquad -5{,}419 = 5{,}781\cos(4{,}899(0{,}553) + (-6{,}204)) \Rightarrow \quad \boxed{-5{,}419 = -5{,}424}$

Avec : $\phi = -2{,}356 \qquad -5{,}419 = 5{,}781\cos(4{,}899(0{,}553) + (-2{,}356)) \Rightarrow \quad -5{,}419 \neq 5{,}424$

Notre équation de la position aura la forme suivante :

$$\boxed{x = 1{,}180\sin\left(4{,}899t - 6{,}204\right)}$$

Voici la position par rapport à l'équilibre de notre masse à 10 secondes :

$$x_{10} = 1{,}180\sin\left(4{,}899(10) - 6{,}204\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x_{10} = -1{,}098 \text{ m}}$$

Nous pouvons maintenant évaluer la position du bloc par rapport au point de chute après les 10 secondes :

$$x_{10} = x_0 + \Delta x_{0\to 0{,}553} - L + \Delta x_{0{,}553\to 10} \qquad \Rightarrow \qquad x_{10} = (0) + (-1{,}5) - (0{,}408) + (-1{,}098)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{x_{10} = -3{,}006 \text{ m}}$$