Ondes et physique moderne

Pré requis : Section 4.3

La désintégration des muons

Une expérience classique sur la dilatation du temps fut menée en 1941 par B.Rossi et D.B. Hall[1] en utilisant des particules chargées appelées mésons μ ou muons. Ces muons produits par le rayonnement cosmique, pénètrent la haute atmosphère et se désintègrent selon la réaction suivante :

$$\mu^{+/-} \rightarrow e^{+/-} + \nu_1 + \overline{\nu}_2$$

où $e^{+/-}$ est un positon/électron, ν est un neutrino et $\overline{\nu}$ est un anti-neutrino.

Lorsque produits par le rayonnement cosmique, les muons voyagent principalement en direction du sol en traversant l'atmosphère terrestre à des vitesses proches de *c*. Lorsque produits en laboratoire, les muons sont pratiquement immobiles par rapport au laboratoire et ils ont statistiquement une demi-vie de $T_{1/2} = 2{,}2\ \mu\text{s}$ (la population initiale de muons est réduite de moitié après un temps égal à une demi-vie).

Lors de l'expérience, les expérimentateurs détectaient la présence de 560 muons/heure sur une montagne située à 2000 m du niveau de la mer et ils détectaient 400 muons/heure au niveau de la mer.

L'évolution d'une population de muons se désintégrant est donnée par l'équation[2] suivante :

$$N = N_0 e^{-\ln(2)\frac{t}{T_{1/2}}}$$

où

N : nombre de muons détectés par heure après un temps t.
N_0 : nombre de muons détectés par heure initialement.
t : temps écoulé entre la détection N_0 et N.
$T_{1/2}$: temps de demi-vie.

À partir de ces informations, évaluez :

a) La vitesse des muons traversant l'atmosphère terrestre.

b) La hauteur de la montagne dans le référentiel des muons.

[1] B.Rossi et D.B.Hall, Physical Review, **59**, 223 (1941).
[2] Cette loi de désintégration vous sera démontrée au chapitre 5.7.

Ondes et physique moderne

Pré requis : Section 4.3

Solution :

Soulignons la présence de deux référentiels :

Référentiel **M** : Les muons
Référentiel **E** : Les expérimentateurs

Puisque le taux de détection des muons est un invariant dans les deux référentiels, évaluons le temps de parcours d'après le référentiel **M** à l'aide du temps de demi-vie des muons au repos et de la loi de la désintégration :

$$N = N_0 e^{-\ln(2)\frac{t}{T_{1/2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{N_0} = e^{-\ln(2)\frac{t}{T_{1/2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\ln(2)\frac{t}{T_{1/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{(400)}{(560)}\right) = -\ln(2)\frac{t}{(2{,}2\times10^{-6})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 1{,}068\times10^{-6}\,\text{s}}$$

Ce calcul nous donne accès à la durée du trajet dans le référentiel **M** qui représente du temps propre T_0:

$$T_\text{M} = T_0 = 1{,}068\times10^{-6}\,\text{s}$$

Dans le référentiel **E**, la hauteur de la montagne correspond à une longueur propre :

$$L_\text{E} = L_0 = 2000 \ \text{m}$$

À partir de la contraction des longueurs et de la cinématique, évaluons la vitesse des muons dans le référentiel **M** :

$$\Delta x = v\Delta t \quad \Rightarrow \quad L_\text{M} = vT_\text{M} \qquad \text{(Cinématique dans le référentiel } \mathbf{M}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{L_\text{E}}{\gamma}\right) = vT_\text{M} \qquad \text{(Contraction des longueurs : } L = \frac{L_0}{\gamma}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad L_\text{E} = \gamma v T_\text{M} \qquad \text{(Isoler } L_\text{E}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad L_\text{E} = \frac{vT_\text{M}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \text{(Remplacer } \gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}\text{)}$$

Pré requis : Section 4.3

Suite du calcul :

$$L_E = \frac{vT_M}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad L_E = \frac{vT_M}{1/c\sqrt{c^2-v^2}}$$

$$\Rightarrow \quad L_E\sqrt{c^2-v^2} = cvT_M$$

$$\Rightarrow \quad L_E^{\,2}\left(c^2-v^2\right) = c^2v^2\,T_M^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad L_E^{\,2}c^2 = c^2v^2\,T_M^{\,2} + v^2L_E^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = \pm\sqrt{\frac{L_E^{\,2}c^2}{c^2T_M^{\,2}+L_E^{\,2}}}} \qquad \text{(Isoler } v\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{(2000)^2\left(3\times10^8\right)^2}{\left(3\times10^8\right)^2\left(1{,}068\times10^{-6}\right)^2+(2000)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad v = 2{,}9622\times10^8\ \text{m/s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = 0{,}9874\,c} \qquad \textbf{(a)}$$

Évaluons le facteur gamma entre le référentiel **E** et **M** :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2{,}9622\times10^8}{3\times10^8}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\gamma = 6{,}319}$$

Évaluer la distance parcourue dans les muons d'après le référentiel **M** :

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \left(L_M\right) = \frac{\left(L_E\right)}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad L_M = \frac{(2000)}{(6{,}319)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_M = 316{,}5\ \text{m}} \qquad \textbf{(b)}$$