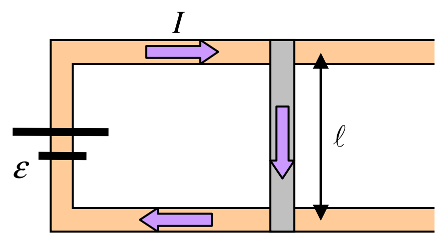
Chapitre 5.4 – Le moteur linéaire

Le comportement physique d'un moteur linéaire

Le moteur électrique linéaire est un circuit électrique constitué d'une pile d'électromotance ε branchée à un rail en forme de U où il y a une tige conductrice de longueur ℓ pouvant glisser sur le rail qui ferme le circuit.

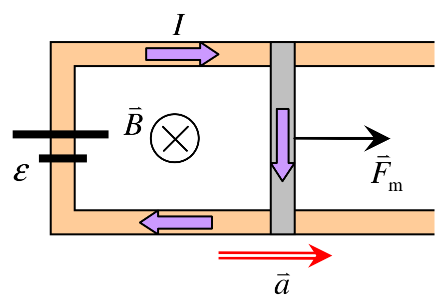


La résistance du circuit est égale à R ce qui permet l'écoulement d'un courant I par la loi d'Ohm :

$$\Delta V = R\,I$$

Lorsque le circuit est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan du circuit, tous les côtés du circuit subissent une force magnétique :

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = I\,\vec{\ell} \times \vec{B}$$

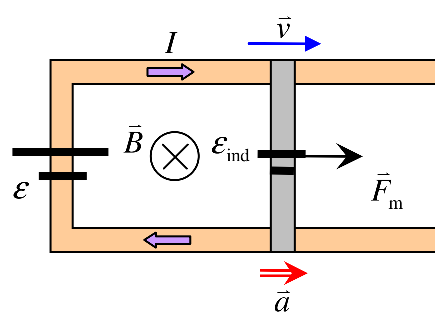


Puisque seulement la tige conductrice est mobile, elle subit une accélération par la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

L'accélération permet à la tige de gagner de la vitesse $\vec{v}$ ce qui génère une électromotance induite $\varepsilon_{\mathrm{ind}}$ (comme dans le cas d'un générateur linéaire) :

$$\varepsilon_{\mathrm{ind}} = vB\ell$$

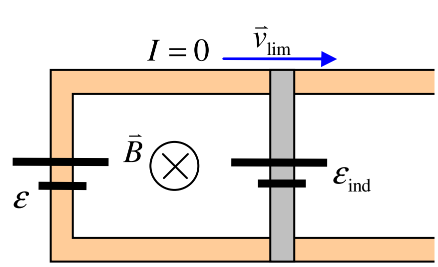


Selon la loi de Lenz, cette nouvelle différence de potentiel s'oppose à ce qui l'a créé : la pile ε. Ainsi, le courant diminue, la force magnétique diminue et l'accélération diminue par la loi des mailles et la loi d'Ohm :

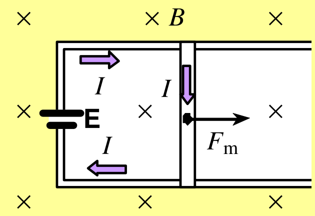
$$\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{ind}} - RI = 0$$

La **tige conductrice** atteint une **vitesse limite** $\vec{v}_{\mathrm{lim}}$ lorsque le courant est nul. L'électromotance induite $\varepsilon_{\mathrm{ind}}$ est alors égale à l'électromotance de la pile et la vitesse limite peut être évaluée grâce à l'expression suivante :

$$\sum \Delta V = \varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{ind}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_{\mathrm{lim}} = \frac{\varepsilon}{B\ell}$$



Situation 1 : ***Un moteur linéaire.*** Un moteur linéaire est alimenté par une pile dont l'électromotance est égale à 12 V tel qu'illustré sur le schéma ci-contre. La tige a une longueur de 0,4 m, une masse de 0,2 kg et une résistance de 3 Ω (le reste du circuit a une résistance négligeable). Un champ magnétique uniforme de 0,5 T entre dans le plan du schéma. On désire déterminer le module de l'accélération de la tige au moment où on la lâche (vitesse initiale nulle). On suppose que le frottement entre les rails et la tige est négligeable et que la gravité n'influence par le mouvement de la tige.



Évaluons le courant à partir de la loi d'Ohm :

$\Delta V = RI \quad \Rightarrow \quad (12) = (3)I$

$\Rightarrow \quad \boxed{I = 4 \text{ A}}$

Évaluons la force magnétique appliquée sur la tige :

$F_m = I\,\ell B \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad F_m = (4)(0{,}4)(0{,}5)\sin(90°)$

$\Rightarrow \quad \boxed{F_m = 0{,}8 \text{ N}}$

Évaluons l'accélération à partir de la 2[ième] loi de Newton selon l'axe x :

$\sum F_x = ma_x \quad \Rightarrow \quad F_m = ma_x$

$\Rightarrow \quad (0{,}8) = (0{,}2)a_x$

$\Rightarrow \quad \boxed{a_x = 4 \text{ m/s}^2}$

Situation 2 : ***La vitesse limite de la tige du moteur linéaire.*** À la **situation 1**, on désire déterminer le module de la vitesse limite atteinte par la tige. (On suppose que le montage s'étend indéfiniment vers la droite.)

La vitesse limite sera atteint lorsque l'électromotance induite dans la tige s'opposera complètement à l'électromotance de la pile ($\varepsilon_{\text{ind}} = \varepsilon$) ce qui réduit la force magnétique à zéro (car $I = 0$). Évaluons la vitesse limite à partir de l'électromotance induite du générateur linéaire :

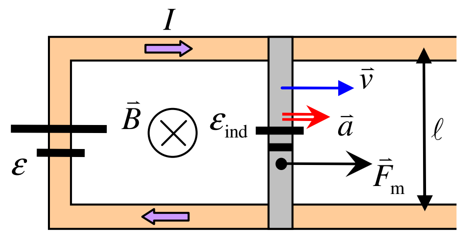
$\varepsilon_{\text{ind}} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad vB\ell = \varepsilon \qquad (\varepsilon_{\text{ind}} = vB\ell)$

$\Rightarrow \quad v(0{,}5)(0{,}4) = (12) \qquad$ (Remplacer valeurs num.)

$\Rightarrow \quad \boxed{v = 60 \text{ m/s}} \qquad$ (Évaluer v)

L'équation du mouvement du moteur linéaire

Le mouvement d'une tige d'un moteur linéaire n'est pas un mouvement à accélération constante de type MUA, car l'électromotance induite qui nuit à l'accélération de la tige dépend de la vitesse v de celle-ci. En considérant cet effet, on peut démontrer[1] que la vitesse $v(t)$ de la tige en fonction du temps peut être évaluée grâce à l'équation suivante :



$$v(t) = v_{\text{lim}}\left[1 + \left(\frac{v_0}{v_{\text{lim}}} - 1\right)e^{-\frac{\ell^2 B^2}{mR}t}\right] \qquad \text{et} \quad v_{\text{lim}} = \varepsilon / B\ell$$

où $v(t)$: Vitesse de la tige (m/s)
v_0 : Vitesse initiale de la tige (m/s)
t : Temps écoulé dans le déplacement de la tige (s)
ε : Électromotance de la pile qui pousse la tige (V)
B : Champ magnétique appliqué sur le moteur linéaire (T)
ℓ : Longueur de la tige (m)
R : Résistance du circuit (Ω)
m : Masse de la tige du moteur linéaire (kg)
v_{lim} : Vitesse limite atteinte par la tige (m/s)

Preuve :

Considérons un moteur linéaire stimulé par la présence d'une pile d'électromotance ε dont la résistance du circuit est R. La tige du moteur linéaire est d'une longueur ℓ et de masse m. Nous allons négliger l'*auto-induction* du circuit, car elle est négligeable.

Évaluons le courant qui circule dans le circuit à partir de la loi des mailles en incluant une électromotrice induite ε_{ind} s'opposant à la circulation du courant :

$$\sum \Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon - \varepsilon_{\text{ind}} - RI = 0 \qquad \text{(Loi des mailles)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\text{ind}}}{R}} \qquad \text{(Isoler } I\text{)}$$

Évaluons l'expression de la force magnétique appliquée sur la tige :

$$F_{\text{m}} = I\,\ell\,B\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad F_{\text{m}} = \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{\text{ind}}}{R}\right)\ell\,B \qquad (\theta = 90°\text{, remplacer } I)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_{\text{m}} = \frac{\ell\,B}{R}(\varepsilon - vB\ell)} \qquad (\varepsilon_{\text{ind}} = vB\ell)$$

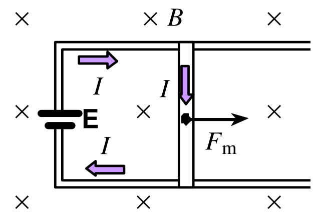
[1] Il est important de noter que cette équation ne considère par l'auto-induction du moteur linéaire (notion explorée dans le chapitre 5.6), car elle est négligeable si le champ magnétique constant est très fort.

Appliquons la 2[ième] loi de Newton à notre tige et évaluons notre équation différentielle afin de déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la tige :

$\sum F = ma$	$\Rightarrow \quad F_{\mathrm{m}} = ma$	(Force magnétique)
	$\Rightarrow \quad \dfrac{\ell B}{R}(\varepsilon - vB\ell) = ma$	($F_{\mathrm{m}} = \dfrac{\ell B}{R}(\varepsilon - vB\ell)$)
	$\Rightarrow \quad \dfrac{\ell B}{R}(\varepsilon - vB\ell) = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	($a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$)
	$\Rightarrow \quad \dfrac{\ell B}{mR}\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\varepsilon - vB\ell}$	(Séparer $\mathrm{d}v$ et $\mathrm{d}t$
	$\Rightarrow \quad \dfrac{\ell B}{mR}\mathrm{d}t = \dfrac{-1}{B\ell}\dfrac{\mathrm{d}v}{v - \varepsilon / B\ell}$	(Factoriser $-\dfrac{1}{\mathrm{B}\ell}$)
	$\Rightarrow \quad -\dfrac{\ell^2 B^2}{mR}\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}v}{v - \varepsilon / B\ell}$	(Simplifier)
	$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_{t=0}^{t} -\dfrac{\ell^2 B^2}{mR}\mathrm{d}t = \int_{v=v_0}^{v} \dfrac{\mathrm{d}v}{v - \varepsilon / B\ell}$	(Poser l'intégrale)
	$\Rightarrow \quad -\dfrac{\ell^2 B^2}{mR}t = \displaystyle\int_{v=v_0}^{v} \dfrac{\mathrm{d}v}{v - \varepsilon / B\ell}$	($\displaystyle\int_{t=0}^{t} \mathrm{A}\mathrm{d}t = At$)
	$\Rightarrow \quad -\dfrac{\ell^2 B^2}{mR}t = \ln\left\lvert v - \varepsilon / B\ell \right\rvert_{v_0}^{v}$	($\displaystyle\int \dfrac{1}{x + A}\mathrm{d}x = \ln\lvert x + A\rvert + C$)
	$\Rightarrow \quad -\dfrac{\ell^2 B^2}{mR}t = \ln\lvert v - \varepsilon / B\ell\rvert - \ln\lvert v_0 - \varepsilon / B\ell\rvert$	(Évaluer les bornes)
	$\Rightarrow \quad -\dfrac{\ell^2 B^2}{mR}t = \ln\left\lvert \dfrac{v - \varepsilon / B\ell}{v_0 - \varepsilon / B\ell} \right\rvert$	($\ln(A) - \ln(B) = \ln\left(\dfrac{A}{B}\right)$
	$\Rightarrow \quad e^{-\frac{\ell^2 B^2}{mR}t} = \dfrac{v - \varepsilon / B\ell}{v_0 - \varepsilon / B\ell}$	(Appli.l'expo., $e^{\ln(x)} = x$)
	$\Rightarrow \quad (v_0 - \varepsilon / B\ell)e^{-\frac{\ell^2 B^2}{mR}t} = v - \varepsilon / B\ell$	(Retirer le dénominateur)
	$\Rightarrow \quad v = \varepsilon / B\ell + (v_0 - \varepsilon / B\ell)e^{-\frac{\ell^2 B^2}{mR}t}$	(Isoler v)
	$\Rightarrow \quad v = \varepsilon / B\ell\left[1 + \left(\dfrac{v_0}{\varepsilon / B\ell} - 1\right)e^{-\frac{\ell^2 B^2}{mR}t}\right]$	(Factoriser $\varepsilon / B\ell$)
	$\Rightarrow \quad v(t) = v_{\mathrm{lim}}\left[1 + \left(\dfrac{v_0}{v_{\mathrm{lim}}} - 1\right)e^{-\frac{\ell^2 B^2}{mR}t}\right] \quad \blacksquare$	($v_{\mathrm{lim}} = \varepsilon / B\ell$ et $v_0 < v_{\mathrm{lim}}$)

Situation 3 : ***La vitesse limite en présence d'une force externe.*** À la **situation 1**, on désire déterminer le module de la vitesse finale limite de la tige lorsqu'elle subit une force externe constante de 0,2 N orientée **(a)** vers la gauche; **(b)** vers la droite.

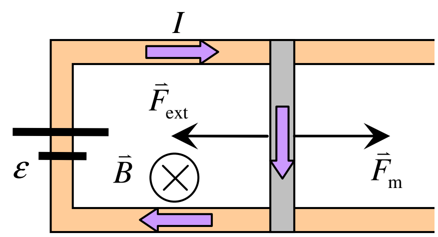
Dans la situation présente, la force magnétique appliquée par le courant débité par la pile de 12 V est orienté selon l'axe x positif.



Rappel des valeurs :

$L = 0{,}4\ \text{m} \qquad B = 0{,}5\ \text{T} \qquad R = 3\ \Omega$

(a) Évaluons la force magnétique appliquée sur la tige à l'équilibre (donc à la vitesse maximale) à partir de la 2ième loi de Newton selon l'axe x avec une force externe orientée selon <u>l'axe x négatif</u> :



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_m + F_{ext} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_m + (-0{,}2) = 0$$

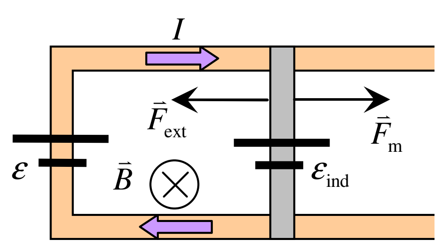
$$\Rightarrow \quad \boxed{F_m = 0{,}2\ \text{N}}$$

Pour que la <u>force magnétique</u> soit orientée dans le <u>sens positif</u> de l'axe x, le **courant** doit **circuler <u>vers le bas</u>** de la tige. Évaluons le courant qui circule dans le circuit pour générer la force magnétique :

$$F_m = I\ell B\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad (0{,}2) = I(0{,}4)(0{,}5)\sin(90°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = 1\ \text{A}}$$

Évaluons l'électromotance induite dans le circuit à partir de la loi des mailles et de la loi d'Ohm. Il est important de rappeler que l'électromotance induite est de sens contraire à l'électromotance de la pile :



$$\sum \Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{pile} - \varepsilon_{ind} - RI = 0$$

$$\Rightarrow \quad (12) - \varepsilon_{ind} - (3)(1) = 0$$

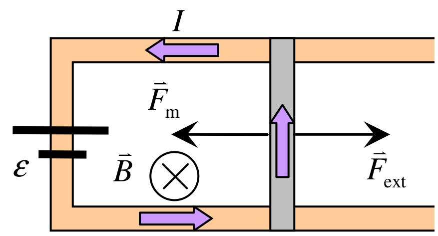
$$\Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{ind} = 9\ \text{V}}$$

Évaluons la vitesse limite à partir de l'électromotance induite du générateur linéaire :

$$\varepsilon_{ind} = vB\ell \quad \Rightarrow \quad (9) = v(0{,}5)(0{,}4)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = 45\ \text{m/s}}$$

(b) Évaluons la force magnétique appliquée sur la tige à l'équilibre (donc à la vitesse maximale) à partir de la 2ième loi de Newton selon l'axe x avec une force externe orienté selon <u>l'axe x positif</u> :



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_m + F_{\mathrm{ext}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_m + (0{,}2) = 0$$

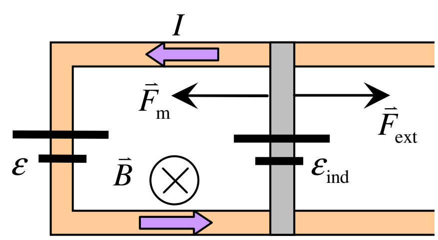
$$\Rightarrow \quad \boxed{F_m = -0{,}2 \text{ N}}$$

Pour que la <u>force magnétique</u> soit orientée dans le <u>sens négatif</u> de l'axe x, le **courant** doit **circuler <u>vers le haut</u>** de la tige. Évaluons le courant qui circule dans le circuit pour générer la force magnétique :

$$F_m = I\ell B \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad (0{,}2) = I(0{,}4)(0{,}5)\sin(90°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = 1 \text{ A}}$$

Évaluons l'électromotance induite dans le circuit à partir de la loi des mailles et de la loi d'Ohm. Il est important de rappeler que l'électromotance induite est de sens contraire à l'électromotance de la pile :



$$\sum \Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\mathrm{pile}} - \varepsilon_{\mathrm{ind}} + RI = 0$$

$$\Rightarrow \quad (12) - \varepsilon_{\mathrm{ind}} + (3)(1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{\mathrm{ind}} = 15 \text{ V}}$$

Évaluons la vitesse limite à partir de l'électromotance induite du générateur linéaire :

$$\varepsilon_{\mathrm{ind}} = vB\ell \quad \Rightarrow \quad (15) = v(0{,}5)(0{,}4)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = 75 \text{ m/s}}$$

<u>En conclusion :</u>

- Lorsque la force externe est dans le même sens que la force magnétique générée par le courant de la pile $\Rightarrow$ augmentation de la vitesse limite (partie b)

- Lorsque la force externe est dans le sens contraire à la force magnétique générée par le courant de la pile $\Rightarrow$ diminution de la vitesse limite (partie a)