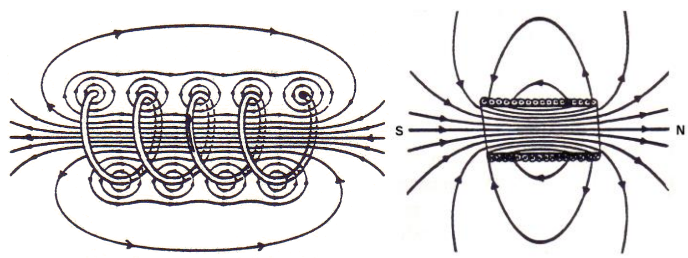
Chapitre 4.9 – Le champ magnétique généré par un solénoïde

Le champ d'un solénoïde

Un **solénoïde** est un enroulement d'un fil conducteur formant plusieurs spires parallèles étalées dans l'espace contrairement à la **bobine** où l'ensemble de ses spires sont tous superposés dans un même plan. Le solénoïde représente ainsi une suite de bobines en série.

Si l'enroulement n'est pas trop serré, on retrouve la forme d'un champ magnétique produits par deux spires tel que décrit à la section précédente.

Si l'enroulement est très compact, le champ magnétique autour de chaque fil devient nul puisque les courants sont très près les uns des autres. L'addition vectorielle du champ magnétique autour de chaque fil est donc nulle.

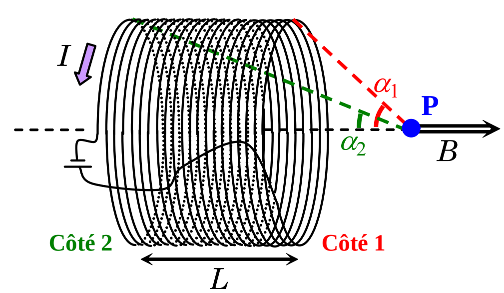


On remarque ici que le **solénoïde parcouru d'un courant** produit un **champ magnétique** de la même forme qu'un **aimant** (avec pôle nord et pôle sud). Ainsi, le solénoïde devient un **électro-aimant**.

Champ magnétique sur l'axe central d'un solénoïde

Le module du champ magnétique généré sur l'axe central d'un solénoïde dépend du courant *I* circulant dans le solénoïde et de la densité de spires *n*. De plus, le module dépend de la distance entre le point **P** et le solénoïde et la taille du solénoïde le tout représenté à l'aide de deux angle α_1 et α_2 :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \left| \cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1) \right|$$



où B : Champ magnétique sur l'axe centrale au point **P** (T)

n : Nombre de spires par unité de longueur ($n = N / L$)

I : Courant électrique (A)

α_1 : Angle pour positionner **Côté 1** par rapport au point **P**

α_2 : Angle pour positionner **Côté 2** par rapport au point **P**

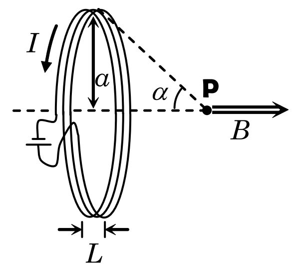
μ_0 : Constante magnétique, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{Ns}^2/\text{C}^2$

Preuve :

Afin d'évaluer le champ magnétique généré par un solénoïde, utilisons la solution du champ magnétique généré par une bobine de largeur L:

Champ magnétique généré par une bobine :

$$B = N\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)$$



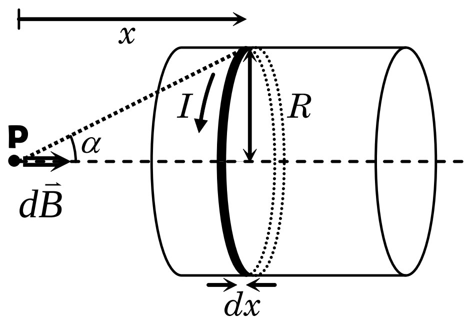
Puisqu'un solénoïde est un regroupement de plusieurs bobines placé côte à côte, nous allons découper notre solénoïde en plusieurs petites tranches de largeur dx comprenant une densité de spires n. Ces tranches représentent des bobines formées à l'aide d'un nombre infinitésimal de spires $dN = n\,dx$. On pourra remplacer dans notre formule précédente le N par dN :

Champ magnétique infinitésimal :

$$d\vec{B} = dN\ \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\ \hat{n}$$

et $\quad dN = n\,dx$

$\hat{n} = \vec{i}$ (règle main droite)



Puisque l'angle α est une fonction de x, évaluons l'intégrale sur l'angle α (car la solution est exprimé en fonction de α_1 et α_2) ce qui nous oblige à introduire des relations trigonométrique entre x et α :

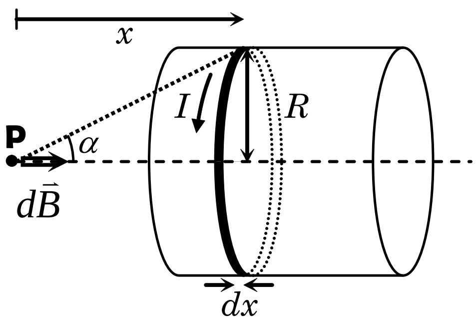
$$\tan(\alpha) = \frac{R}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{\tan(\alpha)} \qquad \text{(Isoler } x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{-R\sec^2(\alpha)}{\tan^2(\alpha)}d\alpha \qquad \left(\text{Dérivée : } \frac{d}{dx}(1/\tan(x)) = -\frac{\sec^2(x)}{\tan^2(x)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{-R(1/\cos^2(\alpha))}{(\sin^2(\alpha)/\cos^2(\alpha))}d\alpha \qquad (\sec(x) = 1/\cos(x),\ \tan(x) = \sin(x)/\cos(x))$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{-R\,d\alpha}{\sin^2(\alpha)}} \qquad \text{(Simplifier)}$$

Évaluons à l'aide d'une sommation continue de champs magnétiques infinitésimaux $d\vec{B}$ le champ magnétique total au point **P** en se basant sur le schéma ci-contre :



- $dN = n\ dx$
- $dx = \dfrac{-R\,d\alpha}{\sin^2(\alpha)}$
- $\hat{n} = \vec{i}$ (règle main droite)

$$d\vec{B} = dN\,\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\ \hat{n}$$

Ainsi :

$\vec{B} = \int d\vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \int dN\,\dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\hat{n}$ (Remplacer $d\vec{B} = dN\,\dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\ \hat{n}$)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \int (n\,dx)\dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)(\vec{i})$ (Remplacer dN et $\hat{n}$)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 n I}{2R}\int \sin^3(\alpha)dx\ \vec{i}$ (Factoriser les constantes)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 n I}{2R}\int \sin^3(\alpha)\left(-\dfrac{R d\alpha}{\sin^2(\alpha)}\right)\ \vec{i}$ (Remplacer dx)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = -\dfrac{\mu_0 n I}{2}\int \sin(\alpha)d\alpha\ \vec{i}$ (Simplifier et factoriser consantes)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = -\dfrac{\mu_0 n I}{2}\int_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_2} \sin(\alpha)d\alpha\ \vec{i}$ (Borne : $\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2$)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = -\dfrac{\mu_0 n I}{2}\left[-\cos(\alpha)\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}\vec{i}$ (Résoudre l'intégrale : $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 n I}{2}\left[\cos(\alpha)\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}\vec{i}$ (Factoriser signe négatif)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 n I}{2}\left(\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right)\ \vec{i}$ (Évaluer l'intégrale)

$\Rightarrow \quad \boxed{B = \dfrac{\mu_0 n I}{2}\left|\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right|}$ (Évaluer seulement le module du champ B)

Situation A : *Dans un solénoïde.* Un solénoïde de 10 000 tours possède une longueur de 20 cm et un rayon de 5 cm. La résistance totale du fil utilisé pour produire l'enroulement est de 2 Ω. On branche ce solénoïde à une pile de 0,5 V. On désire évaluer le module du champ magnétique produit à 5 cm du centre du solénoïde.

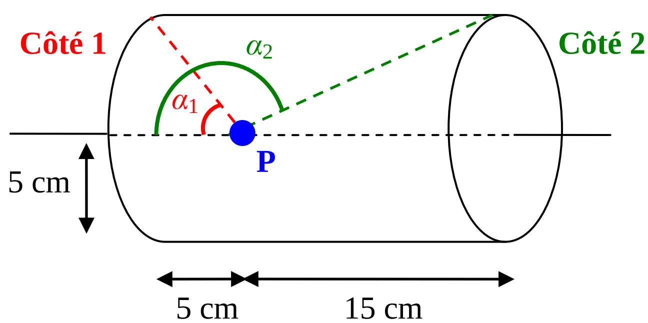
Évaluons le courant électrique qui circule dans le solénoïde : (Loi d'Ohm)

$$\Delta V = R I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\Delta V}{R}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{(0{,}5)}{(2)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = 0{,}25 \text{ A}}$$

Schéma des mesures des angles :



Nous avons les informations suivantes selon la géométrie du problème :

- Courant circulant dans le fil : $I = 0{,}25 \text{ A}$
- Densité de spire : $n = \frac{N}{L} = \frac{(10000)}{(0{,}20)} \Rightarrow \boxed{n = 50000 \text{ m}^{-1}}$
- Angle α_1 : $\tan(\alpha_1) = \frac{(5)}{(5)} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 45°}$
- Angle α_2 : $\tan(\alpha) = \frac{(5)}{(15)} \Rightarrow \alpha = 18{,}43°$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 161{,}6°}$$

Évaluons le module du champ magnétique au point **P** :

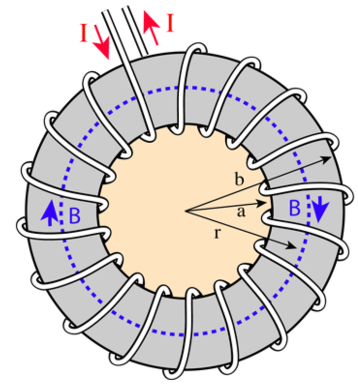
$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}\left|\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right| \quad \Rightarrow \quad B = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(50000)(0{,}25)}{2}\left|\cos(161{,}6°) - \cos(45°)\right|$$

$$\Rightarrow \quad B = 7{,}85 \times 10^{-3}\left|-1{,}656\right|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B = 1{,}30 \times 10^{-2}\,\text{T}}$$

Le champ magnétique d'un tore

Un tore est une géométrie de forme cylindrique dont les deux extrémités sont refermées l'une sur l'autre dans une courbure circulaire pour former un « beigne ». Lorsqu'un fil parcouru par une courant I est enroulé de façon régulière sur la forme d'un tore pour former N spires, alors le champ magnétique généré est égal aux expressions suivantes :



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/magnetic/toroid.html

Champ intérieur $(a < r < b)$	Champ extérieur $(r < a \quad \text{ou} \quad r > b)$
$B = N \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$	$B = 0$

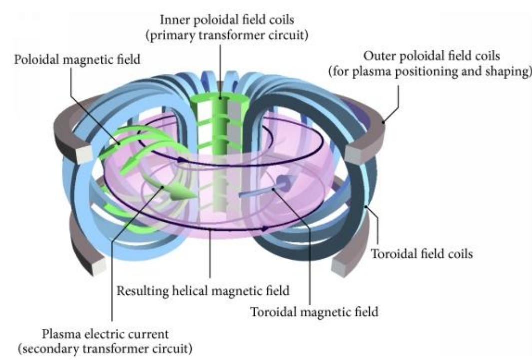
où B : Module du champ magnétique (T)
r : Distance radiale par rapport au centre du tore où $a < r < b$ (m)
a : Distance radiale intérieure au tore (m)
b : Distance radiale extérieure au tore (m)
N : Nombre de spires
I : Courant électrique (A)
μ_0 : Constante magnétique, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$

Preuve :

Une preuve sera proposée dans le chapitre 4.10.

Le tokamak

Un tokamak est une structure en forme de tore (beigne) où il règne un champ magnétique très intense permettant de confiner à l'intérieur un plasma (atome ionisé). En augmentant la densité des particules tout en augmentant l'énergie cinétique de celle-ci à l'aide d'une source externe d'énergie, le tokamak est un milieu propice afin d'y réaliser de la fusion nucléaire comparable à cette réalisée dans une étoile.



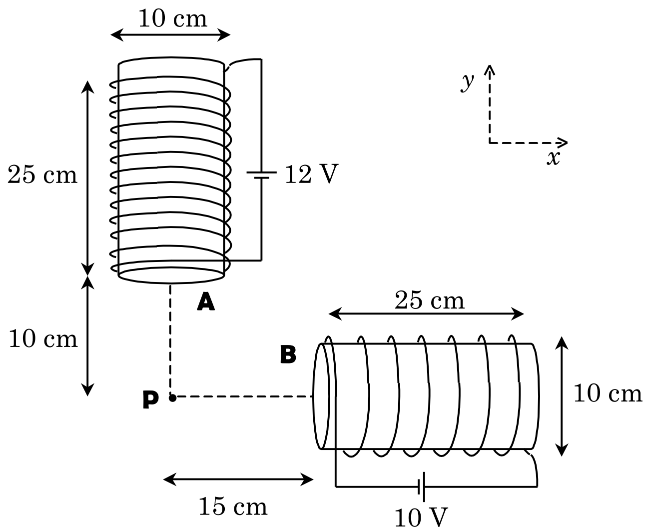
https://en.wikipedia.org/wiki/Tokamak

Malheureusement, cet objectif n'a toujours pas été atteint de nos jours, car le ratio énergie expulsée et injectée n'a toujours pas dépassé le « facteur 1 » ce qui rend ce dispositif toujours endothermique. En 2020[1], un ratio de 2/3 a été atteint sous la condition de 16 MW d'énergie expulsés pour 24 MW d'énergie injecté.

[1] Selon le site suivant : https://en.wikipedia.org/wiki/Tokamak

Exercice

4.9.X ***La superposition des champs magnétiques de deux solénoïdes.*** Le schéma ci-dessous illustre un montage qui comporte deux solénoïdes, **A** (13 tours) et **B** (7 tours). Les fils qui forment les solénoïdes ont un rayon de 1 mm et sont faits d'un matériau dont la résistivité est égale à $2\times10^{-6}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$. **(a)** Calculez la résistance des fils des solénoïdes **A** et **B**. **(b)** Calculez le champ magnétique généré au point P par le montage des deux solénoïdes. *Dans tous les calculs, négligez les segments de fils qui servent de connexion entre les piles et les solénoïdes.*



Solution

4.9.X ***La superposition des champs magnétiques de deux solénoïdes.***

Évaluons les paramètres géométriques du solénoïde **A** et **B** :

Rayon fil : $R = 1\ \mathrm{mm} = 0{,}001\ \mathrm{m}$

Résistivité fil : $\rho = 2\times10^{-6}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$

Circonférence fil A : $C_A = \pi D_A = \pi(0{,}1) = 0{,}314\ \mathrm{m}$

Circonférence fil B : $C_B = \pi D_B = \pi(0{,}1) = 0{,}314\ \mathrm{m}$

Surface circulaire A et B : $A = \pi R^2 = \pi(0{,}001)^2 = 3{,}141\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2$

Supposons que la longueur du fil sur le solénoïde est comptée de la façon suivante :

$$\ell = N * C$$

Voici la longueur du fil composant le solénoïde **A** et **B** :

$N_A = 13$ spires $\qquad \ell_A = N_A * C_A = (13)(0{,}314) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ell_A = 4{,}082 \text{ m}}$

$N_B = 7$ spires $\qquad \ell_B = N_B * C_B = (7)(0{,}314) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ell_B = 2{,}198 \text{ m}}$

(a) Évaluons la résistance des fils des solénoïdes avec la formule de la résistivité :

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \quad \Rightarrow \quad R_A = \rho \frac{\ell_A}{A} = \left(2\times10^{-6}\right)\frac{(4{,}082)}{\left(3{,}141\times10^{-6}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_A = 2{,}60 \ \Omega}$$

$$R_B = \rho \frac{\ell_B}{A} = \left(2\times10^{-6}\right)\frac{(2{,}198)}{\left(3{,}141\times10^{-6}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_B = 1{,}40 \ \Omega}$$

Évaluons les courants électriques qui circulent dans les solénoïdes **A** et **B** à partir de leur résistance et de la loi d'Ohm :

$$\Delta V = R\ I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\Delta V}{R}$$

Pour A : $\qquad I_A = \dfrac{\Delta V_A}{R_A} = \dfrac{\varepsilon_A}{R_A} = \dfrac{(12)}{(2{,}60)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_A = 4{,}62 \text{ A}}$

Pour B : $\qquad I_B = \dfrac{\Delta V_B}{R_B} = \dfrac{\varepsilon_B}{R_B} = \dfrac{(10)}{(1{,}40)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_B = 7{,}14 \text{ A}}$

Avec la solution du champ magnétique produit par un solénoïde, évaluons le champ magnétique produit par les solénoïdes **A** et **B** :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\right)$$

<u>Information sur le solénoïde **A** :</u>

La direction de $\vec{B}_A$: $\qquad \vec{j}$

Spires : $\qquad n_A = \dfrac{N_A}{L_A} = \dfrac{(13)}{(0{,}25)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_A = 52 \text{ spires/m}}$

Angles : $\qquad \tan(\alpha_{A1}) = \dfrac{0{,}05}{0{,}10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{A1} = 26{,}57^\circ}$

$\qquad \tan(\alpha_{A2}) = \dfrac{0{,}05}{0{,}10 + 0{,}25} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{A2} = 8{,}13^\circ}$

Champ : $\qquad \vec{B}_A = \dfrac{\mu_0 n_A I_A}{2}\left(\cos(\alpha_{A2}) - \cos(\alpha_{A1})\right)\ \vec{j}$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}_A = \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\right)(52)(4{,}62)}{2}\left(\cos(8{,}31^\circ) - \cos(26{,}57^\circ)\right)\ \vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}_A = 14{,}4\times10^{-6}\,\vec{j}\ \text{T}}$$

Information sur le solénoïde **B** :

La direction de $\vec{B}_B$: $\vec{i}$

Spires : $n_B = \dfrac{N_B}{L_B} = \dfrac{(7)}{(0{,}25)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{n_B = 28 \text{ spires/m}}$

Angles : $\tan(\alpha_{B1}) = \dfrac{0{,}05}{0{,}15}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha_{B1} = 18{,}43°}$

$\tan(\alpha_{B2}) = \dfrac{0{,}05}{0{,}15 + 0{,}25}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha_{B2} = 7{,}13°}$

Champ : $\vec{B}_B = \dfrac{\mu_0 n_B I_B}{2}\left(\cos(\alpha_{B2}) - \cos(\alpha_{B1})\right)\ \vec{i}$

$\Rightarrow$ $\vec{B}_B = \dfrac{\left(4\pi \times 10^{-7}\right)(28)(7{,}14)}{2}\left(\cos(7{,}13°) - \cos(18{,}43°)\right)\ \vec{i}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B}_B = 5{,}47 \times 10^{-6}\,\vec{i}\ \text{ T}}$

(b) Évaluons le champ magnétique total au point P sous forme vectorielle :

$\vec{B} = \vec{B}_A + \vec{B}_B$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B} = \left(5{,}47\ \vec{i} + 14{,}4\ \vec{j}\right) \times 10^{-6}\,\text{T}}$