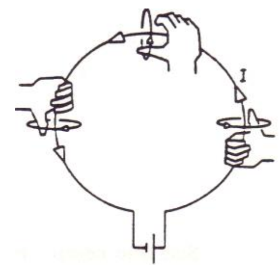
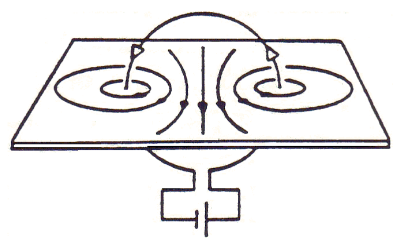
Chapitre 4.8 – Le champ magnétique généré par une boucle de courant

Champ d'une spire

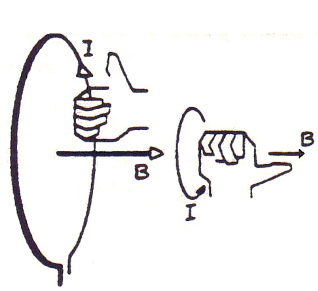
Si l'on courbe notre ligne de courant en cercle, on peut définir l'orientation du champ magnétique à l'aide de la règle de la main droite.

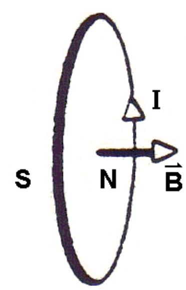


Si l'on étudie le champ magnétique dans un plan perpendiculaire à la spire, on retrouve la situation de deux courants parallèles de sens contraire.



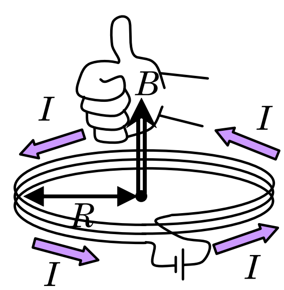
Très souvent, c'est le champ magnétique au centre de la boucle qui va nous intéresser. Avec la règle de la main droite, il est évident d'en deviner le sens.





Champ magnétique au centre d'une bobine

Une bobine est un regroupement de spire que l'on peut approximer comme étant superposé les uns sur les autres. Le module du champ magnétique produit au centre d'une bobine parcourue par un courant I est défini à l'aide de l'équation suivante :



$$B = N\frac{\mu_0 I}{2R}$$

où B : Champ magnétique produit au centre de la bobine en tesla (T)

N : Le nombre de spire dans la bobine, $N \in \Re > 0$

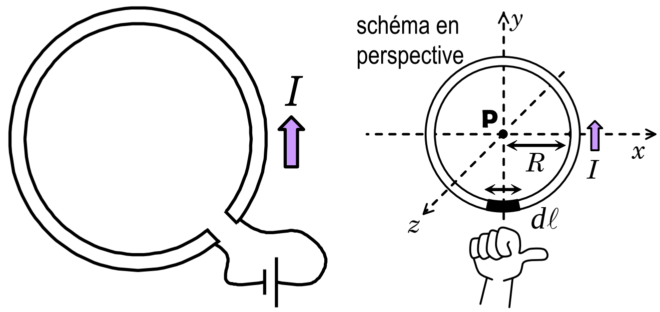
I : Courant électrique en ampère (A)

R : Le rayon de la bobine en mètre (m)

μ_0 : Constante magnétique, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$

Preuve :

Considérons une spire dans le plan *xy* parcourue par un courant I où l'on veut évaluer le champ magnétique au centre de celle-ci en un point **P**.



On réalise que chaque petit bout de fil $\mathrm{d}\ell$ génère un petit élément de champ magnétique $\mathrm{d}\vec{B}$ au point **P** de la forme suivante :

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin(\theta)\ \hat{n}$$

où $\theta = 90°$: Angle entre $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et $\hat{r}$.

$r = R$: Distance constante entre tous les $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et le point **P**.

$\hat{n} = \vec{k}$: Direction de tous les champs magnétiques infinitésimaux $\mathrm{d}\vec{B}$.

Puisque le fil possède une longueur connue ($C = 2\pi R$), on peut réaliser l'addition de tous les champs magnétiques infinitésimaux $\mathrm{d}\vec{B}$:

$$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin(\theta)\hat{n} \qquad \text{(Remplacer } \mathrm{d}\vec{B}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{R^2}\sin(90°)\vec{k} \qquad \text{(Remplacer } r \text{ et } \theta\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int \mathrm{d}\ell\,\vec{k} \qquad \text{(Factoriser les constantes)}$$

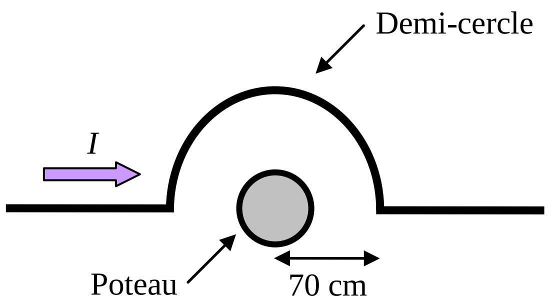
$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}(2\pi R)\vec{k} \qquad \text{(Évaluer l'intégrale: } \int \mathrm{d}\ell = 2\pi R\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\vec{k} \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \blacksquare \qquad \text{(Évaluer le module de } B\text{)}$$

Situation A : *Poteau évité à l'aide d'un demi-cercle.* Un électricien applique au sol un fil électrique très long en ligne droite. Afin d'éviter un poteau qui représente un obstacle pour la trajectoire rectiligne du fil, l'électricien contourne l'obstacle en courbant son fil sur un demi-cercle de 70 cm de rayon. Le centre de courbure du fil coïncide avec le centre du poteau. On désire évaluer le module du champ magnétique produit par le fil électrique au centre du poteau sachant qu'un courant de 2 A circule dans le fil.

Voici une représentation graphique de la situation :



Nous pouvons découper notre long fil en trois parties :

- Fil semi-infini gauche (1) : $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)\right| = 0$ car $\alpha_1 = \alpha_2$.

- Demi-cercle (2) : $B = N\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

- Fil semi-infini droit (3) : $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)\right| = 0$ car $\alpha_1 = \alpha_2$.

Ainsi, le champ magnétique total sera produit uniquement par le demi-cercle :

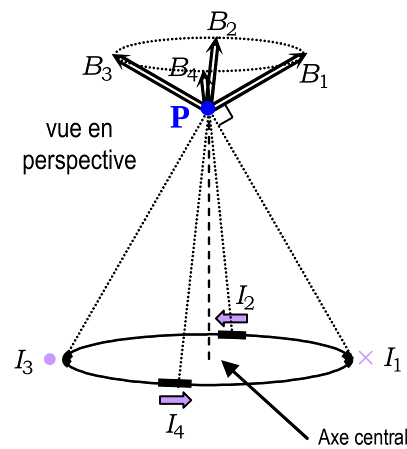
$B = N\dfrac{\mu_0 I}{2R} \quad \Rightarrow \quad B = \left(\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\mu_0 I}{2R}$ (Il y a ½ spire de courant)

$\Rightarrow \quad B = \left(\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{(4\pi \times 10^{-7})(2)}{2(0{,}70)}$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{B = 8{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{T}}$ (Module du champ magnétique)

Champ sur l'axe central d'une spire

Nous pouvons également évaluer le champ magnétique sur l'axe central d'une spire.

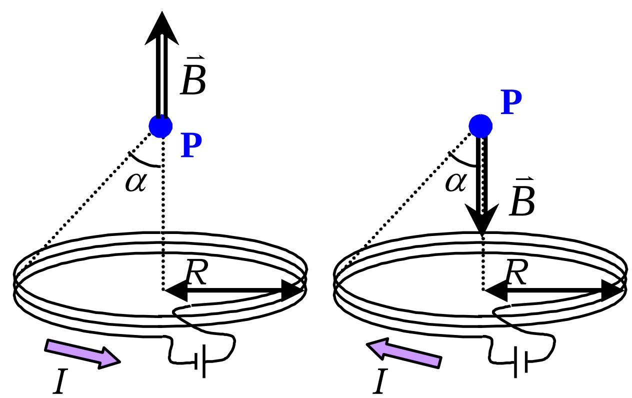


En découpant la spire en petits éléments de fil fini, on réalise que l'ensemble des petits champs magnétiques produits forme un cône. L'addition vectorielle de tous ces champs magnétiques donne un champ magnétique résultant parallèle à l'axe central de la spire.

Ainsi, le champ magnétique le long de l'axe central d'une spire est perpendiculaire à la spire et orienté selon le sens du courant.

Champ magnétique sur l'axe central d'une bobine

Le module du champ magnétique B généré le long d'un axe passant par le central de la bobine et étant perpendiculaire au plan de la bobine dépend du courant I circulant dans la bobine, du nombre de spires N, du rayon R de la bobine et de la distance entre le point P où le champ magnétique est évalué et le centre de la bobine exprimée sous la forme d'un angle α :



$$B = N\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)$$

où B : Champ magnétique produit sur l'axe centrale de la bobine en tesla (T)

N : Le nombre de spire dans la bobine, $N \in Z > 0$

I : Courant électrique en ampère (A)

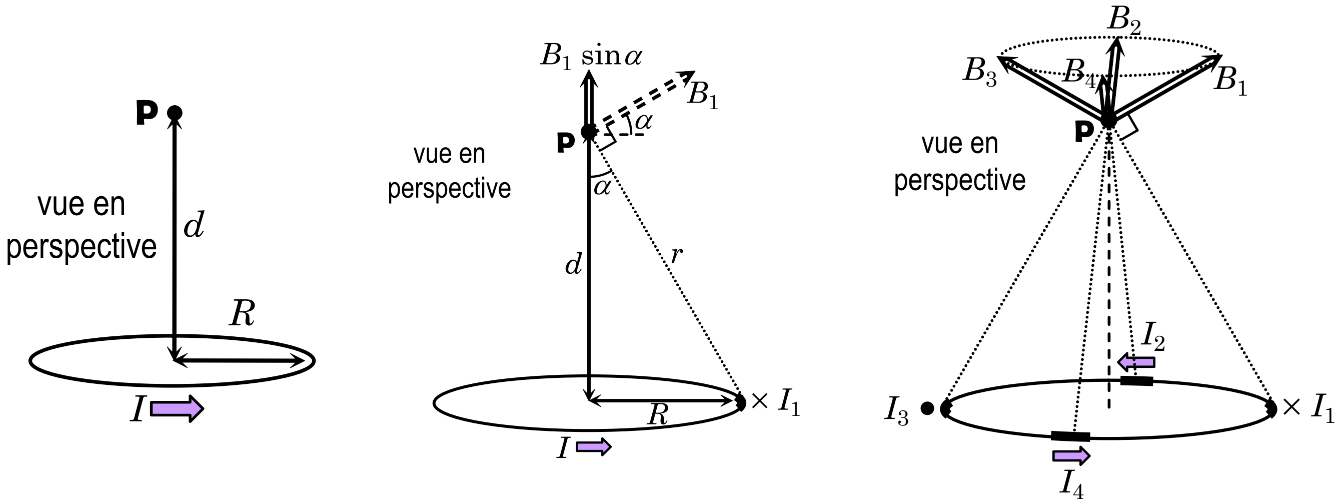
R : Le rayon de la bobine en mètre (m)

α : Angle pour positionner le point **P**

μ_0 : Constante magnétique , $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$

Preuve :

Évaluons le champ magnétique sur l’axe central d’une spire :



On réalise que :

- B_1, B_2, B_3 et B_4 sont tous de même module.
- Le champ magnétique résultant est purement vers le haut.
- Nous avons la relation géométrique suivante : $\sin\alpha = \dfrac{R}{r}$.

On réalise que chaque petit bout de fil $d\ell$ génère un champ magnétique au point **P** de la forme suivante :

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin(\theta)\ \hat{n}$$

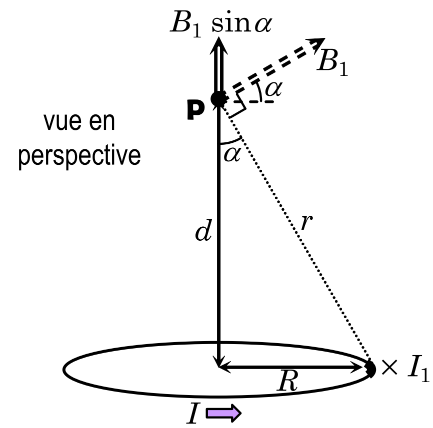
où $\theta = 90°$: Angle constant entre $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et $\hat{r}$.

$r = \sqrt{R^2 + d^2}$: Distance constante entre tous les $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et le point **P**.

$\hat{n}$: Direction particulière pour chacun des $\mathrm{d}\vec{B}$.

Le champ magnétique selon l’axe y aura la forme

$$\mathrm{d}B_y = \mathrm{d}B \sin(\alpha)$$



que l’on peut réécrire à l’aide de la loi de Biot-Savart sous la forme

$$\mathrm{d}B_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin(\theta)\sin(\alpha)$$

où l’expression $\sin(\alpha)$ correspond à la projection du champ magnétique sur l’axe y.

Par symétrie, on réalise que l’addition de tous les $\mathrm{d}\vec{B}$ génère uniquement un champ magnétique dans la direction $\vec{j}$. Effectuons notre intégrale afin d’évaluer le module du champ magnétique sur l’axe de la bobine :

$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \int \mathrm{d}B\,\hat{n}$ (Décomposer module et orientation)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \int \mathrm{d}B_y\ \vec{j}$ (Appliquer principe de superposition)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin(\theta)\sin(\alpha)\ \vec{j}$ (Remplacer $\mathrm{d}B_y$)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin(90°)\sin(\alpha)\ \vec{j}$ (Remplacer θ)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin(\alpha)\int \mathrm{d}\ell\ \ \vec{j}$ (Factoriser les constants)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin(\alpha)(2\pi R)\ \vec{j}$ (Évaluer l’intégrale: $\int \mathrm{d}\ell = 2\pi R$)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I R}{2 r^2}\sin(\alpha)\vec{j}$ (Simplifier)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I R}{2(R/\sin(\alpha))^2}\sin(\alpha)\vec{j}$ (Remplacer $\sin\alpha = R/r \quad \Rightarrow r = R/\sin\alpha$)

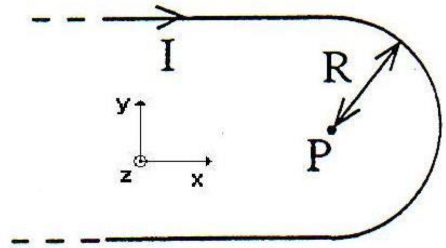
$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\vec{j}$ (Simplifier)

$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha) \quad \blacksquare$ (Évaluer le module du champ B)

Exercices

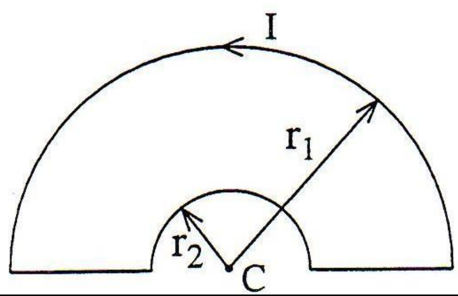
Référence : Note Science Santé – Chapitre 6 – Question 13

On replie un fil droit infini par une demi-boucle de rayon R. Calculez le champ magnétique *B* au centre P de la demi-boucle.



Référence : Note Science Santé – Chapitre 6 – Question 11

Un fil en forme de deux demi-cercles reliés, est parcouru par un courant *I*. Trouvez *B* au centre C des deux demi-cercles.



Solutions

<u>Référence :</u> Note Science Santé – Chapitre 6 – Question 13

<u>Demi-boucle :</u>

$$\vec{B}_{demi-boucle} = \frac{1}{2} B_{boucle}\left(-\vec{k}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_{demi-boucle} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 I}{2R}\right)\vec{k}$$

$$\left(B_{boucle} = \frac{\mu_0 I}{2R} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}_{demi-boucle} = -\frac{\mu_0 I}{4R}\vec{k}}$$

<u>Fil haut :</u>

$$\vec{B}_{fil\_haut} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)\right| \left(-\vec{k}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_{fil\_haut} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left| \sin\left(\pi/2\right) - \sin(0) \right| \left(-\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}_{fil\_haut} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\vec{k}}$$

<u>Fil bas :</u> $\boxed{\vec{B}_{fil\_haut} = \vec{B}_{fil\_bas}}$

<u>Champ total :</u>

$$\vec{B} = \vec{B}_{demi-boucle} + \vec{B}_{fil\_haut} + \vec{B}_{fil\_bas} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4R}\vec{k} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{k}$$

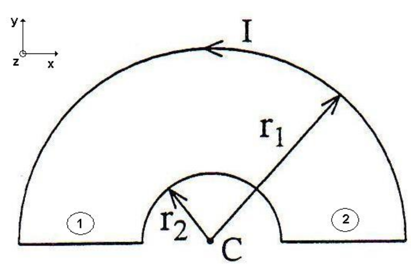
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = -\mu_0 I\left(\frac{1}{4R} + \frac{1}{2\pi R}\right)\vec{k}}$$

<u>Référence :</u> Note Science Santé – Chapitre 6 – Question 11

$$\vec{B}_{arc1} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2R}\left(\vec{k}\right) = \frac{\mu_0 I}{4r_1}\vec{k}$$

$$\vec{B}_{arc2} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2R}\left(-\vec{k}\right) = -\frac{\mu_0 I}{4r_2}\vec{k}$$

$\vec{B}_{fil1} = 0$ et $\vec{B}_{fil2} = 0$



$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{B}_{arc1} + \vec{B}_{arc2} + \vec{B}_{fil1} + \vec{B}_{fil2} = \frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\vec{k}$$