Chapitre 4.7 – La loi de Biot-Savart et le champ magnétique d'un fil rectiligne fini

La loi de Biot-Savart

Après avoir déterminer le module du champ magnétique $\vec{B}$ généré par un long fil parcouru par un courant, les physiciens Biot et Savart détermine en 1820 le champ magnétique infinitésimal $\mathrm{d}\vec{B}$ généré par un segment de fil infinitésimal $\mathrm{d}\vec{\ell}$ parcouru par un courant électrique I à un endroit P. Cependant, cette expression n'est valide que lorsque les charges électriques en mouvement se déplacent lentement[1] ce qui est le cas lorsqu'il y a un courant électrique qui circule dans un fil conducteur :

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell\sin(\theta)}{r^2}\hat{n}$$

où $\mathrm{d}\vec{B}$: Champ magnétique infinitésimal en tesla (T)

I : Courant électrique qui circule dans l'élément de fil en ampère (A)

$\mathrm{d}\vec{\ell}$: Segment de fil infinitésimal orienté dans le sens du courant en mètre (m)

r : Distance entre $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et l'endroit P où l'on veut évaluer le champ en mètre (m)

μ_0 : Constante magnétique, $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$

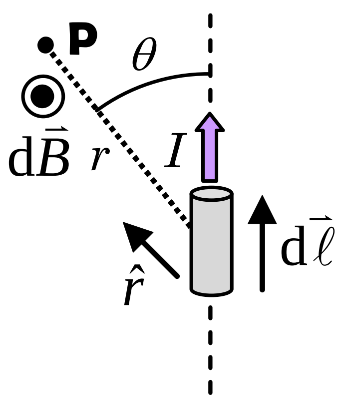
θ : Angle entre $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et $\hat{r}$

$\hat{r}$: Vecteur unitaire d'orientation de $\mathrm{d}\vec{\ell}$ (source) à P (cible) $(|\hat{r}| = 1)$

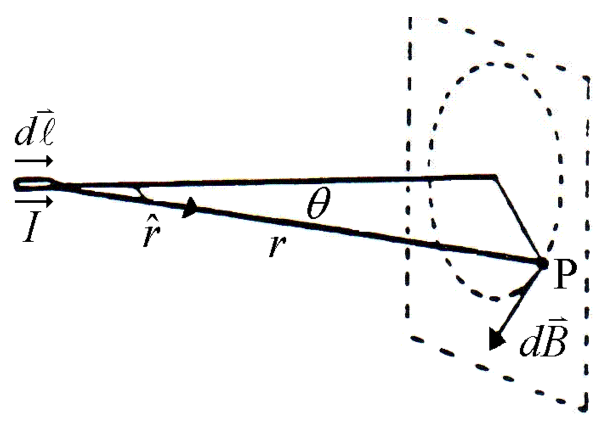
$\hat{n}$: Orientation du champ magnétique selon la règle de la main droite $(|\hat{n}| = 1)$

Représentation :

2 dimensions



3 dimensions



[1] La force magnétique et le champ magnétique sont en réalité une manifestation d'un effet relativiste qui porte le nom de « contraction des longueurs » lorsqu'il y a des charges électriques en mouvement. À basse vitesse, l'approximation de la loi de Biot-Savart s'applique pour exprimer la valeur du champ magnétique.

Champ magnétique d'un fil fini

Le module du champ magnétique B généré par un fil fini parcouru par un courant I dépend de la distance R entre le fil et l'endroit **P** où l'on désire évaluer le champ magnétique, du courant I et de la position angulaire des extrémités du fil par rapport au point **P** :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)\right|$$

où B : Champ magnétique produit par le fil au point **P** (T)

I : Courant électrique (A)

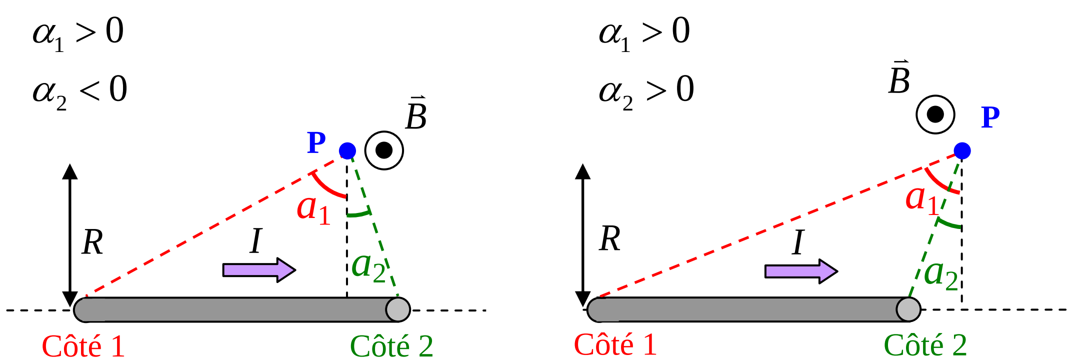
R : Plus petite distante entre le point **P** et le prolongement du fil (m)

μ_0 : Constante magnétique, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$

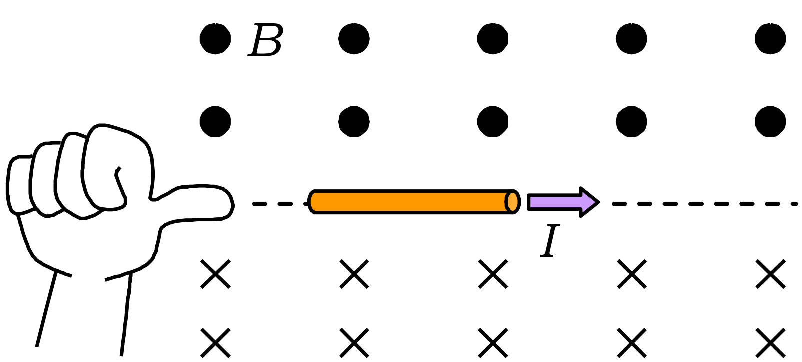
α_1 : Angle délimitant l'extrémité du **Côté 1** du fil par rapport au point **P**

α_2 : Angle délimitant l'extrémité du **Côté 2** du fil par rapport au point **P**

Schéma :

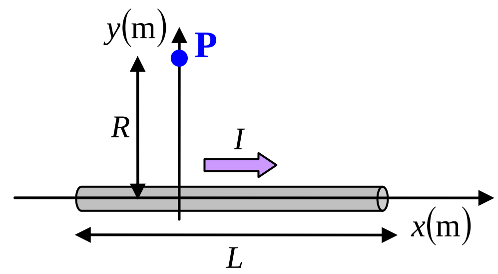


L'orientation du champ magnétique selon la règle de la main droite :



Preuve :

Considérons un fil de longueur L parallèle à l'axe x où il y circule un courant électrique I. Évaluons le champ magnétique B généré par ce fil en un point **P** à une distance R du fil tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.



Découpons notre fil en morceau de fil infinitésimal de longueur dx et représentons le champ magnétique infinitésimal $\mathrm{d}\vec{B}$ généré par ce fil infinitésimal à l'aide de notre système d'axe :

Champ magnétique infinitésimal :

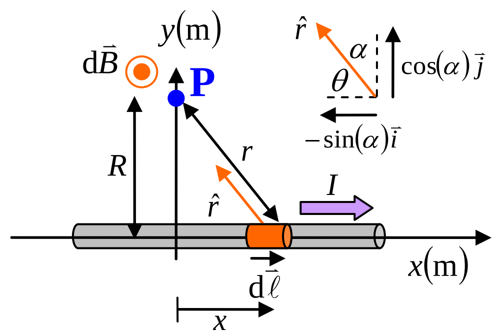
$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}$$

et

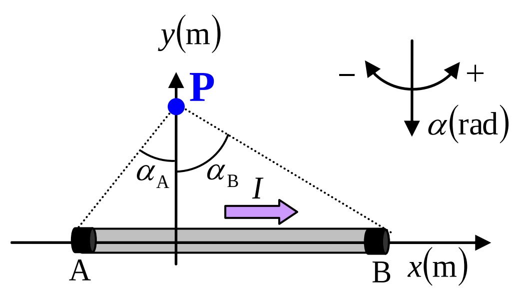
$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{i}$$

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

$$\hat{r} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$$



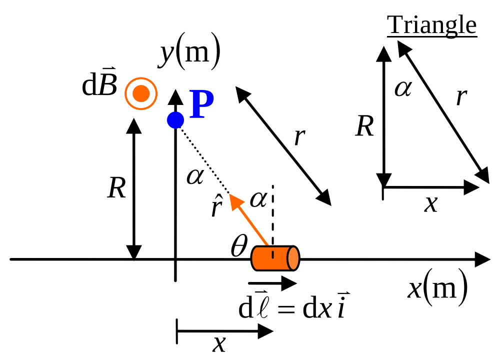
Introduisons un nouveau système d'axe α qui mesure un angle par rapport à l'axe vertical y. Ce système d'axe permet de délimiter les extrémités du fil A et B. Dans ce cas particulier, $\alpha_\mathrm{A} < 0$ et $\alpha_\mathrm{B} > 0$.



Avec ce nouveau système d'axe, nous pouvons établir des nouvelles relations trigonométrique entre x, R, r et α :

$$\cos(\alpha) = \frac{R}{r} \quad\Rightarrow\quad \boxed{r = \frac{R}{\cos(\alpha)}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{x}{R} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x = R\tan(\alpha)}$$



Puisque nous avons dans l'expression de $\mathrm{d}\vec{\ell}$ une référence à dx, nous devons évaluer dx en fonction de α si nous voulons utiliser l'axe α pour effectuer notre sommation à l'aide de l'intégrale :

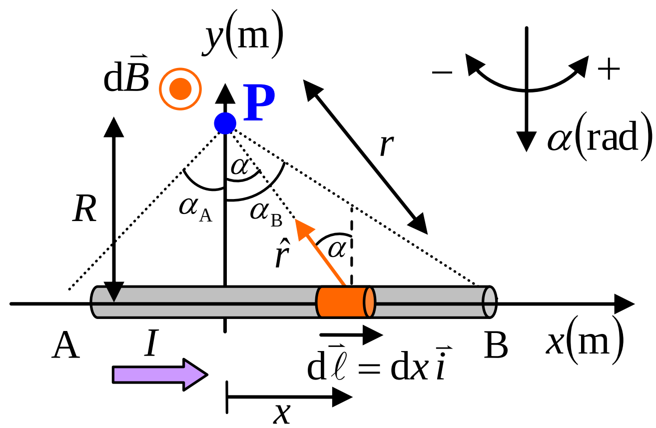
$x = R\tan(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}(R\tan(\alpha))$ (Appliquer la différentielle de chaque côté)

$\Rightarrow \quad \mathrm{d}x = R\,\mathrm{d}(\tan(\alpha))$ (Factoriser la constance R)

$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}x = R\sec^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha}$ ($\mathrm{d}(\tan\alpha) = \sec^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha$)

Évaluons à l'aide d'une sommation continue de champs magnétiques infinitésimaux $\mathrm{d}\vec{B}$ le champ magnétique total au point **P** en se basant sur le schéma ci-contre :

- $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{i}$
- $\mathrm{d}x = R\sec^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha$
- $x = R\tan(\alpha)$
- $r = \sqrt{x^2 + R^2}$
- $\hat{r} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$



Ainsi :

$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \int \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}$ (Remplacer $\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}$)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \int \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\left(\mathrm{d}x\,\vec{i}\right)\times\hat{r}}{\left(\sqrt{x^2+R^2}\right)^2}$ (Remplacer $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et r)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\int \dfrac{\mathrm{d}x\,\vec{i}\times\hat{r}}{x^2+R^2}$ (Factoriser const et simplifier racine)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\int \dfrac{\left(R\sec^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)\vec{i}\times\hat{r}}{\left(R\tan(\alpha)\right)^2+R^2}$ (Remplacer x et dx en fonction de α)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\int \dfrac{R\sec^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha\;\vec{i}\times\hat{r}}{R^2\tan^2(\alpha)+R^2}$ (Mettre terme au carré)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\int \dfrac{R\sec^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha\;\vec{i}\times\hat{r}}{R^2\left(\tan^2(\alpha)+1\right)}$ (Factoriser R^2 au dénominateur)

$\Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\int \dfrac{\sec^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha\;\vec{i}\times\hat{r}}{R\left(\sec^2(\alpha)\right)}$ (Simplifier R, identité trigo : $\tan^2(\theta)+1 = \sec^2(\theta)$)

Simplifions l'expression de l'intégrale. Puisque $\hat{r}$ varie selon l'angle α, il n'est pas constant dans l'intégrale. Remplaçons $\hat{r}$ et posons les bornes d'intégration à notre intégrale : ($\hat{r} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sec^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha \; \vec{i} \times \hat{r}}{R\left(\sec^2(\alpha)\right)}$$ (Expression précédente)

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int \mathrm{d}\alpha \; \vec{i} \times \hat{r}$$ (Simplifier et factoriser constante)

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int \mathrm{d}\alpha \; \vec{i} \times \left(-\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}\right)$$ (Remplacer $\hat{r} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$)

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int \left(-\sin(\alpha)\vec{i} \times \vec{i} + \cos(\alpha)\vec{i} \times \vec{j}\right)\mathrm{d}\alpha$$ (Distribuer produit vectoriel)

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int \cos(\alpha)\mathrm{d}\alpha \; \vec{k}$$ (Effectuer produit vectoriel : $\vec{i} \times \vec{i} = 0$ et $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$)

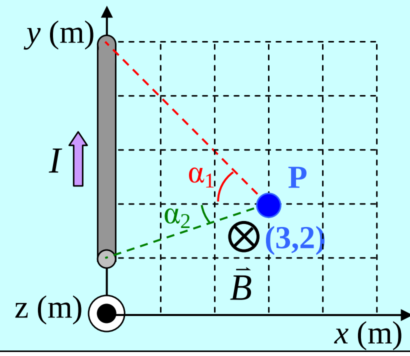
$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha=\alpha_\mathrm{A}}^{\alpha_\mathrm{B}} \cos(\alpha)\mathrm{d}\alpha \; \vec{k}$$ (Borne : $\alpha = \alpha_\mathrm{A} \to \alpha_\mathrm{B}$)

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left[\sin(\alpha)\right]_{\alpha_\mathrm{A}}^{\alpha_\mathrm{B}} \vec{k}$$ (Résoudre l'intégrale)

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(\sin(\alpha_\mathrm{B}) - \sin(\alpha_\mathrm{A})\right)\vec{k}$$ (Évaluer l'intégrale)

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left|\sin(\alpha_\mathrm{A}) - \sin(\alpha_\mathrm{B})\right| \qquad \blacksquare$$ (Évaluer seulement le module du champ *B*)

Situation A : *Le fil fini sur l'axe y.* Un fil de 4 m parallèle à l'axe *y* est centré à la coordonnée (0,3) d'un plan cartésien. On désire évaluer le champ magnétique sous forme vectoriel généré par le fil à la coordonnée (3,2) du plan cartésien sachant qu'un courant de 0,5 A circule dans le fil dans le sens positif de l'axe *y*.



Nous avons les informations suivantes selon la géométrie du problème :

Courant circulant dans le fil : $I = 0{,}5\ \text{A}$

La distance entre le point **P** et le fil : $R = 3\ \text{m}$

Angle α_1 : $\tan(\alpha_1) = \dfrac{(3)}{(3)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = 45°}$

Angle α_2 : $\tan(\alpha_2) = \dfrac{(-1)}{(3)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2 = -18{,}43°}$

Nous avons ainsi le champ magnétique suivant au point **P** produit par la tige :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)\right| \quad \Rightarrow \quad B = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(0{,}5)}{4\pi(3)}\left|\sin(45°) - \sin(-18{,}43°)\right|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \text{T}}$$

Avec la règle de la main droite, nous pouvons préciser le champ magnétique sous forme vectorielle :

$$\boxed{\vec{B} = -1{,}7 \times 10^{-8}\,\vec{k}\ \ \text{T}}$$

Le champ magnétique généré par une charge ponctuelle en mouvement à basse vitesse constant (complément informatique)

Le champ magnétique $\vec{B}$ généré par une charge ponctuelle Q en mouvement à basse[2] vitesse $\vec{v}$ dépend du sens de la vitesse ainsi que de la position où sera évalué le champ magnétique. Le champ magnétique sera rotatif autour de l'axe de la vitesse de la particule.

Définition avec vecteur orientation $\hat{r}$	Définition avec vecteur position $\vec{r}$ et $\vec{r}_Q$
$\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$	$\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Q\vec{v}\times\left(\vec{r}-\vec{r}_Q\right)}{\left\Vert \vec{r}-\vec{r}_Q \right\Vert^2}$

(Condition de validité : $v \ll c = 3\times10^8 \text{ m/s}$)

où
- $\vec{B}$: Champ magnétique en tesla (T)
- Q : Charge en mouvement (C)
- $\vec{v}$: Vitesse de la charge en mouvement (m/s)
- r : Distance entre la charge Q et l'endroit P où l'on veut évaluer le champ en mètre (m)
- $\hat{r}$: Vecteur unitaire d'orientation de Q (source) à P (cible) ($|\hat{r}| = 1$)
- $\vec{r}$: Vecteur position de la cible (m).
- $\vec{r}_Q$: Vecteur position de la charge (m).
- μ_0 : Constante magnétique, $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\text{Ns}^2/\text{C}^2$

<u>Preuve :</u>

Considérons un élément de fil infinitésimal $\mathrm{d}\vec{\ell}$ dans lequel circule un courant *I*. Attribuons le courant à une charge $\mathrm{d}Q$ comptabilisée sur un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ donnant la relation

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

et que les premières charges comptabilisées ont eu le temps de se déplacer sur la longueur du fil $\mathrm{d}\vec{\ell}$ à une vitesse constante $\vec{v}$ donnant ainsi la relation de cinématique

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{v}\,\mathrm{d}t \quad .$$

[2] Cette démonstration est basée sur le champ magnétique généré par un fil où un courant y circule. Puisque les charges en mouvement se déplacent à très basse vitesse dans un fil, il faut accepter que cette démonstration n'est valide qu'à basse vitesse. Une démonstration faisant intervenir des principes avancés d'électromagnétisme en fait la démonstration.

Démontrons qu'une charge totale Q en mouvement à basse vitesse $\vec{v}$ sera responsable de générer un champ magnétique $\vec{B}$ à l'aide de la loi de Biot-Savart :

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left(\vec{v}\,\mathrm{d}t\right)\times\hat{r}}{r^2} \qquad \text{(Remplacer } \mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{v}\,\mathrm{d}t\text{)}$$

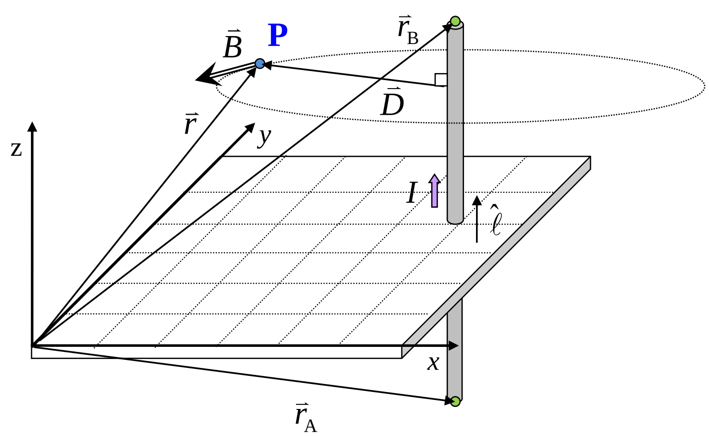
$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{v}\,\mathrm{d}t\times\hat{r}}{r^2} \qquad \text{(Remplacer } I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{d}Q\frac{\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} \qquad \text{(Simplifier } \mathrm{d}t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\,\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} \quad \blacksquare \qquad \text{(Réaliser l'intégral)}$$

Le champ magnétique d'un fil rectiligne fini à l'aide des vecteurs positions (complément informatique)

À partir de la position $\vec{r}_\mathrm{A}$ et $\vec{r}_\mathrm{B}$ désignant les deux extrémités d'un fil parcouru par un courant I, nous pouvons évaluer une expression vectorielle pour déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ à une position $\vec{r}$ désignée par un point **P** grâce aux équations suivantes :



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{R}_\mathrm{F}}{\left\|\vec{R}_\mathrm{F}\right\|^2}\left|\sin\left(\alpha_\mathrm{A}\right)-\sin\left(\alpha_\mathrm{B}\right)\right|$$

où $$\vec{R}_\mathrm{F} = \hat{\ell}\times\left(\vec{r}-\vec{r}_\mathrm{F}\right)$$

avec les terme suivants :

$$\vec{\ell} = \frac{\vec{r}_\mathrm{B}-\vec{r}_\mathrm{A}}{\left\|\vec{r}_\mathrm{B}-\vec{r}_\mathrm{A}\right\|} \qquad \vec{r}_{p\mathrm{A}} = \vec{r}_\mathrm{A}-\vec{r} \qquad \vec{r}_{p\mathrm{B}} = \vec{r}_\mathrm{B}-\vec{r} \qquad \hat{r}_{p\mathrm{A}} = \frac{\vec{r}_{p\mathrm{A}}}{\left\|\vec{r}_{p\mathrm{A}}\right\|} \qquad \hat{r}_{p\mathrm{B}} = \frac{\vec{r}_{p\mathrm{B}}}{\left\|\vec{r}_{p\mathrm{B}}\right\|}$$

(point **P** vers **A**) (point **P** vers **B**)

$$\vec{n} = \vec{r}_{p\mathrm{A}}\times\vec{\ell} \qquad \hat{n} = \frac{\vec{n}}{\left\|\vec{n}\right\|} \qquad \vec{D} = \vec{n}\times\vec{\ell} \qquad \hat{D} = \frac{\vec{D}}{\left\|\vec{D}\right\|}$$

(attention aux vecteurs !) (attention aux vecteurs !)

$$\alpha_\mathrm{A} = \arcsin\left(\hat{D}\times\hat{r}_{p\mathrm{A}}\cdot\hat{n}\right) \qquad \alpha_\mathrm{B} = \arcsin\left(\hat{D}\times\hat{r}_{p\mathrm{B}}\cdot\hat{n}\right)$$

(angle positif ou négatif) (angle positif ou négatif)

<u>Preuve :</u>

En construction …