Chapitre 4.1 – Le champ magnétique

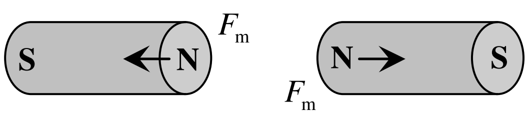
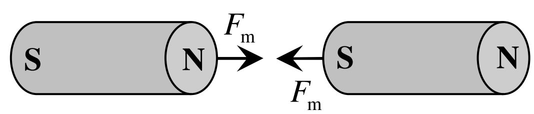
La découverte du magnétisme

On peut accorder au Grec de l'antiquité la découverte du magnétisme après avoir découvert près de la ville de Magnésie un minéral qui avait la propriété d'attirer le fer. Ce minéral fut baptisé magnétite et il est chimiquement composé de fer et d'oxygène (Fe_3O_4). De nos jours, nous sommes capable de modifier la structure de certains matériaux afin qu'ils acquièrent la propriété d'attirer le fer ce qui permet de les qualifier « d'aimant ».

Magnétite

Les pôles d'un aimant

Un aimant est toujours constitué de deux pôles : pôle nord (N) et pôle sud (S). Puisque des aimants peuvent s'attirer ou se repousser, l'expérience nous démontre que :

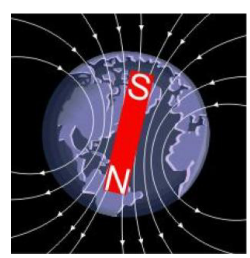
Deux pôles identiques se repoussent	Deux pôles différents s'attirent
	

La boussole

Les Chinois furent les premiers à exploiter le magnétisme en découvrant le principe de la boussole au 1^{ier} siècle.

Boussole

Une boussole est constituée d'une aiguille « aimantée » dont le pôle nord de l'aiguille pointe dans la direction du pôle nord géographique. Puisque le pôle nord de l'aiguille doit être attiré par le pôle sud d'un autre aimant (celui de la Terre), la découverte de la boussole nous permet de réaliser que le pôle nord géographique est en réalité un pôle sud magnétique.

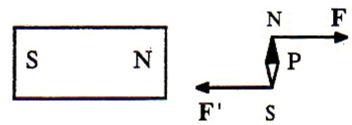


La Terre est un gigantesque aimant.

La Terre est un gigantesque aimant pouvant influencer magnétiquement d'autre aimant comme une boussole. La nature magnétique de la Terre provient de courants électriques situés au centre de celle-ci et ce mécanisme n'est pas encore très bien compris.

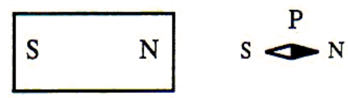
Boussole et orientation du champ magnétique généré par un aimant

Si l'on place une boussole à un point **P** près d'un aimant, l'aiguille va se déplacer sous l'effet d'une force magnétique.



- Le pôle nord de l'aiguille sera repoussé par le pôle nord de l'aimant (force $\vec{F}$).
- Le pôle sud sera attiré par le pôle nord de l'aimant (force $\vec{F}^{'}$).

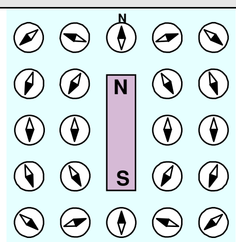
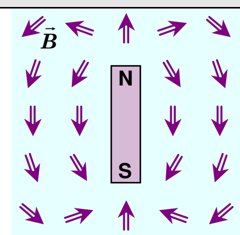
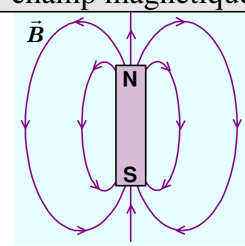
Après avoir atteint l'équilibre, l'aiguille de la boussole sera aligné au point **P** de la façon suivante.



Si l'on définit le **champ magnétique** comme étant l'influence extérieure des pôles magnétiques d'un aimant et que l'on utilise la boussole pour désigner l'orientation de ce champ, alors il faut conclure que :

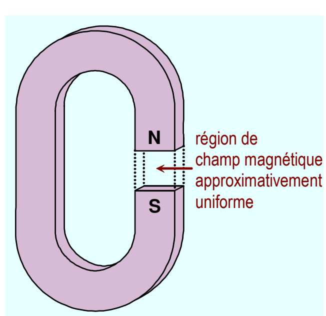
- Le champ magnétique « sort » d'un pôle nord.
- Le champ magnétique « entre » dans un pôle sud.

Voici la représentation du champ magnétique $\vec{B}$ autour d'une tige aimantée :

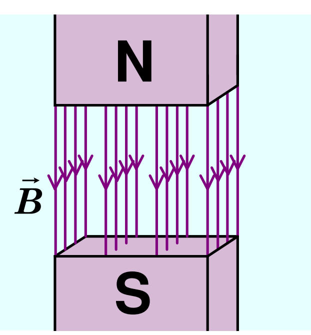
Orientation de plusieurs boussoles près d'un aimant	Orientation du champ magnétique près d'un aimant	Représentation du champ magnétique en ligne de champ magnétique
		

Champ magnétique uniforme

Pour produire un champ magnétique uniforme, on peut utiliser un aimant en forme de « C » :



On représente un champ magnétique uniforme à l'aide de lignes de champ magnétique également espacées :



L'étude de la force magnétique par la trajectoire

Afin d'évaluer une expression associée à la force magnétique, étudions la trajectoire d'une particule se déplaçant dans un champ magnétique constant.

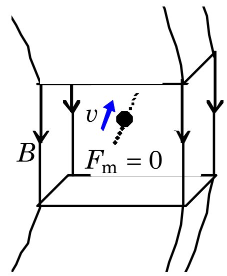
<u>Situation 1 :</u> Particule neutre se déplaçant avec une vitesse quelconque.

<u>Observation :</u>

La particule se déplace à vitesse constante.

<u>Conclusion :</u>

La particule ne subit pas de force, car il n'y a pas d'accélération. La **force magnétique dépend** de la **charge** de la particule.



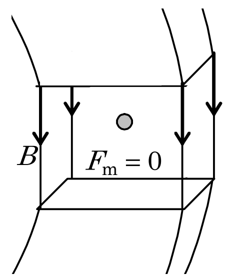
<u>Situation 2 :</u> Particule chargée avec vitesse nulle.

<u>Observation :</u>

La particule demeure immobile.

<u>Conclusion :</u>

La particule ne subit pas de force, car il n'y a pas d'accélération. La **force magnétique dépend** de la **vitesse** de la particule.



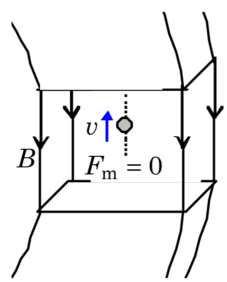
<u>Situation 3 :</u> Particule chargée avec vitesse parallèle au champ magnétique.

<u>Observation :</u>

La particule se déplace à vitesse constante.

<u>Conclusion :</u>

La particule ne subit pas de force, car il n'y a pas d'accélération. La **force magnétique dépend** de la **vitesse perpendiculaire au champ magnétique**.



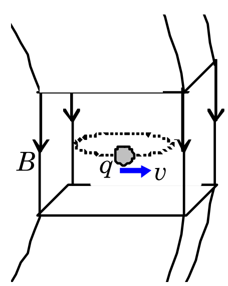
<u>Situation 4 :</u> Particule chargée avec vitesse perpendiculaire au champ magnétique.

<u>Observation :</u>

La particule se déplace à vitesse constante v sur une trajectoire circulaire.

<u>Conclusion :</u>

La **force magnétique** est toujours **perpendiculaire** au **champ magnétique** $\vec{B}$ et à la **vitesse** $\vec{v}$ de la particule.



Le produit vectoriel

En mathématique, on définit le produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de la façon suivante. Il est important de préciser que le produit vectoriel donne un résultat vectoriel et que le produit n'est pas commutatif ($\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$, $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$) :

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \sin(\theta)\ \hat{n}$$
$$= (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$$

où $\vec{A}$: Le premier vecteur dans le produit vectoriel ($\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$)

$\vec{B}$: Le deuxième vecteur dans le produit vectoriel ($\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$)

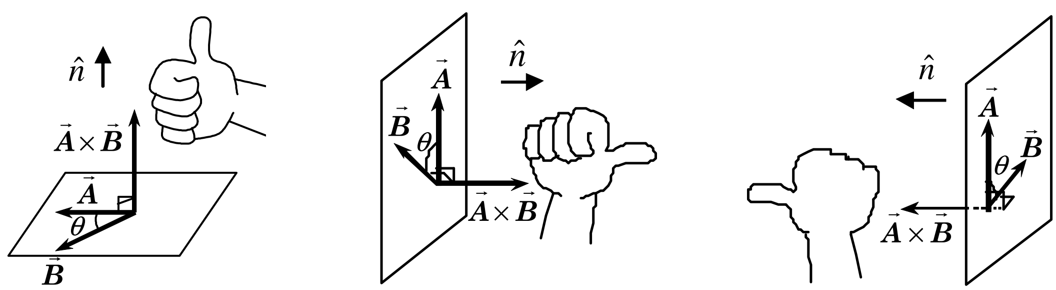
$\left|\vec{A}\right|$: Le module du vecteur $\vec{A}$ ($\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$)

$\left|\vec{B}\right|$: Le module du vecteur $\vec{B}$ ($\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$)

θ : Angle entre les deux vecteurs

$\hat{n}$: Vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ($\left|\hat{n}\right| = 1$)

Pour déterminer la direction du vecteur $\vec{A}\times\vec{B}$ sans faire le calcul au long, on peut utiliser la règle de la main droite. La règle de la main droite permet de définir l'orientation du vecteur unitaire $\hat{n}$:



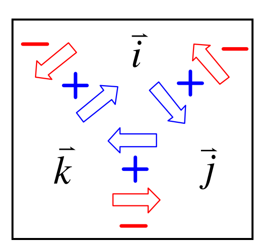
Voici quelques propriétés du produit vectoriel :

1) Le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est toujours égal à zéro :

$$\vec{i}\times\vec{i} = 0 \qquad \vec{j}\times\vec{j} = 0 \qquad \vec{k}\times\vec{k} = 0$$

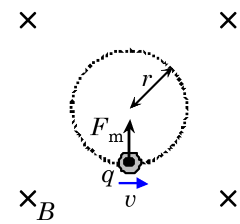
2) Le produit vectoriel donne toujours un vecteur résultat perpendiculaire aux deux vecteurs initiaux :

○ $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$	○ $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$
○ $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$	○ $\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$
○ $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$	○ $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$
(sens horaire)	(sens anti-horaire)



La force magnétique sur une particule

La **force magnétique** est l'influence que produit un **champ magnétique** sur une **particule chargée** en **mouvement**. La force magnétique $\vec{F}_\text{m}$ est toujours perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}$ de la particule chargée et au champ magnétique $\vec{B}$ ce qui a pour conséquence de produire des trajectoires circulaires chez les particules libres dont le rayon r dépend du module de la force magnétique.



Le module de la force magnétique dépend des paramètres suivants :

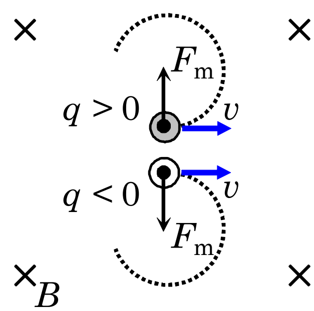
$F_\text{m} \propto |q|$: La force magnétique est proportionnelle à la charge, car une particule de charge élevée effectue une trajectoire circulaire avec un petit rayon.

$F_\text{m} \propto B$: La force magnétique est proportionnelle au champ magnétique, car une particule effectue dans un champ magnétique élevé une trajectoire circulaire avec un petit rayon.

$F_\text{m} \propto v_\perp$: La force magnétique est proportionnel à la vitesse perpendiculaire à $\vec{B}$, car deux particules de vitesses différentes dans un champ magnétique tourne dans le champ au même rythme (même période pour effectuer un tour complet).

Voici l'expression vectorielle de la force magnétique $\vec{F}_\text{m}$ appliquée sur une particule de charge q en mouvement à vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$:

$$\vec{F}_\text{m} = q\,\vec{v}\times\vec{B} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_\text{m} = q\,vB\sin\theta\,\hat{n}$$



où
- $\vec{F}_\text{m}$: Force magnétique en newton (N)
- q : Charge de la particule en coulomb (C)
- $\vec{v}$: Vitesse de la particule mètre par seconde (m/s)
- $\vec{B}$: Champ magnétique en tesla (T)
- θ : Angle entre la vitesse $\vec{v}$ et le champ magnétique $\vec{B}$

Pour évaluer le module du champ magnétique, on peut utiliser l'expression de la force magnétique afin d'isoler le champ magnétique :

$$B = \frac{F_m}{|q|v\sin(\theta)}$$

Cette expression nous permet d'exprimer l'unité du champ magnétique qui est en tesla en l'honneur de Nikola Tesla en unité fondamental :

$$1\ \text{T} = 1\frac{\text{N}}{\text{C}\cdot\left(\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)} = 1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{C}\cdot\left(\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)\cdot\text{s}^2} = 1\frac{\text{kg}}{\text{C}\cdot\text{s}}$$

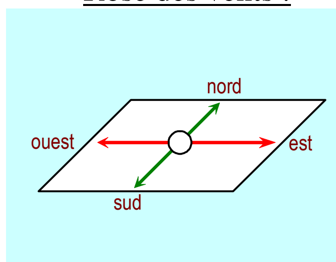
Système de coordonnée *xyz*

Un système de coordonnée (nord, sud, est, ouest) qui porte le nom de « rose des vents » fait référence à un système de coordonnée à deux dimensions. On peut faire la correspondance suivante avec un système d'axe *xy* :

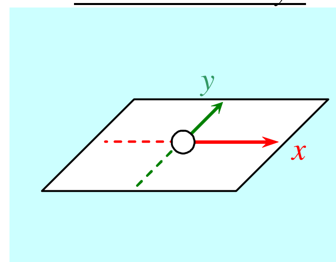
Correspondances :

Nord : $+y$
Sud : $-y$
Est : $+x$
Ouest : $-x$

Rose des vents :



Plan cartésien *xy* :

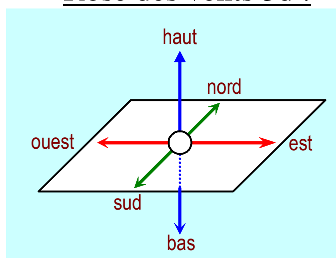


On peut ajouter la notion de haut et bas à la « rose des vents » pour avoir la correspondance suivante avec un système d'axe *xyz* :

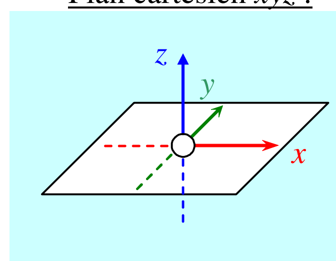
Correspondances :

Nord : $+y$
Sud : $-y$
Est : $+x$
Ouest : $-x$
Haut : $+z$
Bas : $-z$

Rose des vents 3d :



Plan cartésien *xyz* :



Situation 2 : *La force magnétique sur un proton.* Un proton se déplace à 50 m/s vers le nord-est dans un champ magnétique de 0,2 T orienté vers le sud. On désire déterminer le module et l'orientation de la force magnétique qu'il subit.

Évaluons l'orientation de la vitesse et du champ magnétique par rapport à l'axe *x* et l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{B}$:

- Orientation vitesse : nord-est $\rightarrow$ $\theta_v = 45°$ par rapport à l'axe *x*
- Orientation champ magnétique : sud $\rightarrow$ $\theta_B = -90°$ par rapport à l'axe *x*
- Angle entre $\vec{v}$ et $\vec{B}$: $\theta_{vB} = \left|\theta_v - \theta_B\right|$ $\Rightarrow$ $\boxed{\theta_{vB} = 135°}$

Évaluons le module de la force magnétique :

$$F_\mathrm{m} = q\,vB\sin\theta \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{m} = \left(1{,}6\times10^{-19}\right)(50)(0{,}2)\sin(135°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_\mathrm{m} = 1{,}131\times10^{-18}\ \mathrm{N}}$$

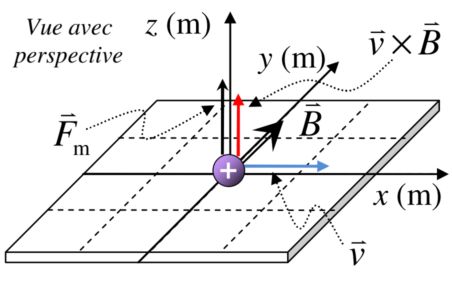
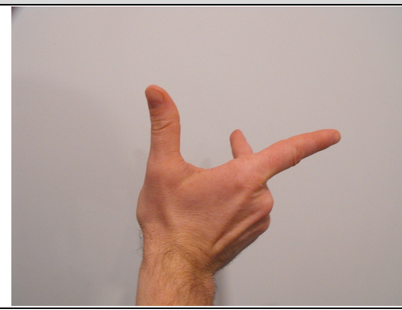
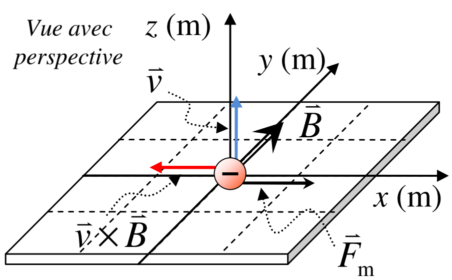
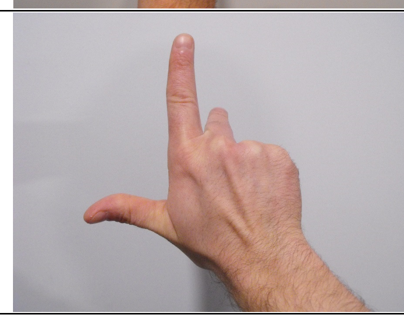
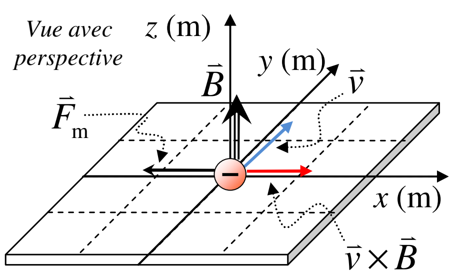
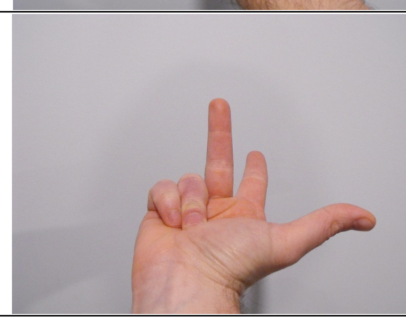
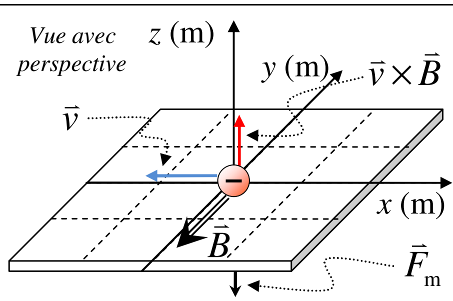
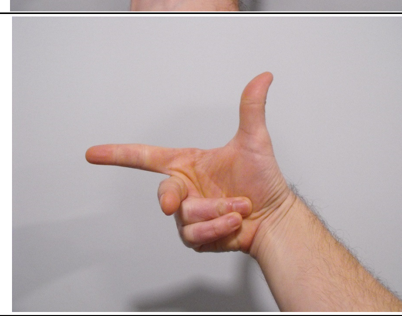
Avec la règle de la main droite, on peut déterminer que l'orientation est **vers le bas**.

La règle de la main droite – Orientation de la force magnétique

Afin de déterminer l'orientation de la force magnétique de l'interaction d'un champ magnétique avec une particule chargée en mouvement, nous pouvons utiliser la règle de la main droite suivante :

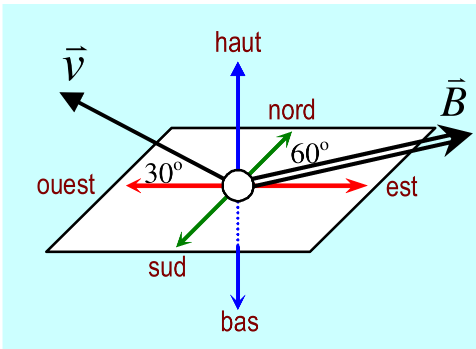
- **Index (1[er] doigt) :** Orientation de la vitesse $\vec{v}$.
- **Majeur (2[e] doigt) :** Orientation du champ magnétique $\vec{B}$.
- **Pouce :** Orientation de $\vec{v}\times\vec{B}$.
- **Force magnétique :** Orientation du signe de la charge multiplié par $\vec{v}\times\vec{B}$.

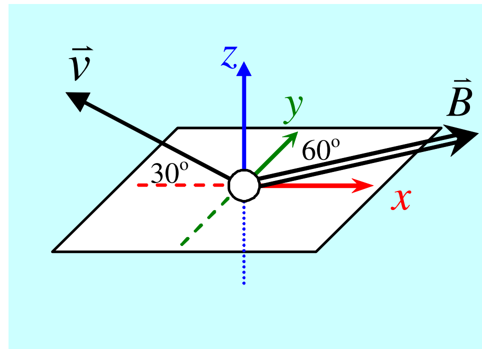
<u>Example :</u>

Schéma de la situation	Positionnement de la main droite pour évaluer $\vec{v}\times\vec{B}$
	
	
	
	

Situation A : *Force magnétique avec le produit vectoriel.* Un électron se déplace à 400 km/s vers l'ouest à 30° au-dessus de l'horizontal dans un champ magnétique constant de 0,07 T orienté vers le nord à 60° vers l'est. On désire évaluer **(a)** la force magnétique sous forme vectorielle et **(b)** le module de la force magnétique

Voici une représentation graphique de la situation dans une « rose des vents 3d » et dans un plan cartésien *xyz* :





Puisque les vecteurs ne sont pas alignés sur les axes, il sera beaucoup plus efficace d'utiliser la règle du produit vectoriel pour évaluer la force magnétique. Décomposons nos vecteurs dans le système d'axe *xyz* :

$$\vec{v} = -v\cos(30°)\vec{i} + v\sin(30°)\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = -(400\times10^3)\cos(30°)\vec{i} + (400\times10^3)\sin(30°)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v} = (-3{,}46\ \vec{i} + 2{,}00\ \vec{k})\times10^5\ \text{m/s}}$$

$$\vec{B} = B\sin(60°)\vec{i} + B\cos(60°)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = (0{,}07)\sin(60°)\vec{i} + (0{,}07)\cos(60°)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = (6{,}06\vec{i} + 3{,}5\ \vec{j} +)\times10^{-2}\ \text{T}}$$

On peut effectuer le produit vectoriel $\vec{v}\times\vec{B}$ de deux façons différentes :

<u>Méthode 1 :</u> Utilisation de l'équation du produit vectoriel

Avec : $\vec{A}\times\vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$

$$\vec{v}\times\vec{B} = (v_y B_z - v_z B_y)\vec{i} - (v_x B_z - v_z B_x)\vec{j} + (v_x B_y - v_y B_x)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{v}\times\vec{B} = &\left[(0)(0) - (2\times10^5)(0{,}035)\right]\vec{i} \\ &-\left[(-3{,}46\times10^5)(0) - (2\times10^5)(0{,}0606)\right]\vec{j} \\ &+\left[(-3{,}46\times10^5)(0{,}035) - (0)(0{,}0606)\right]\vec{k} \end{aligned}$$

Ce qui donne : $\boxed{\vec{v}\times\vec{B} = (-7\vec{i} + 12{,}1\vec{j} - 12{,}1\vec{k})\times10^3}$

<u>Méthode 2 :</u> Distribution de l'opérateur produit vectoriel

<u>Rappel :</u> $\vec{v} = \left(-3{,}46\,\vec{i} + 2{,}00\,\vec{k}\right)\times 10^{5}$ m/s

$\vec{B} = \left(3{,}5\,\vec{j} + 6{,}06\,\vec{i}\right)\times 10^{-2}$ T

$$
\begin{aligned}
\vec{v}\times\vec{B} &= \left(-3{,}46\times 10^{5}\,\vec{i} + 2\times 10^{5}\,\vec{k}\right)\times\left(0{,}035\,\vec{j} + 0{,}0606\,\vec{i}\right) \\
&= \left[\left(-3{,}46\times 10^{5}\,\vec{i}\right)\times\left(0{,}035\,\vec{j}\right)\right] \quad (\text{terme}\,1) \\
&\quad + \left[\left(-3{,}46\times 10^{5}\,\vec{i}\right)\times\left(0{,}0606\,\vec{i}\right)\right] \quad (\text{terme}\,2) \\
&\quad + \left[\left(2\times 10^{5}\,\vec{k}\right)\times\left(0{,}035\,\vec{j}\right)\right] \quad (\text{terme}\,3) \\
&\quad + \left[\left(2\times 10^{5}\,\vec{k}\right)\times\left(0{,}0606\,\vec{i}\right)\right] \quad (\text{terme}\,4)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\vec{v}\times\vec{B} = & -12{,}1\times 10^{3}\left(\vec{i}\times\vec{j}\right) \\
& - 21{,}0\times 10^{3}\left(\vec{i}\times\vec{i}\right) \\
& + 7\times 10^{3}\left(\vec{k}\times\vec{j}\right) \\
& + 12{,}1\times 10^{3}\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}\times\vec{B} = -12{,}1\times 10^{3}\left(\vec{k}\right) + 21{,}0\times 10^{3}\left(0\right) + 7\times 10^{3}\left(-\vec{i}\right) + 12{,}1\times 10^{3}\left(\vec{j}\right)$$

Ce qui donne : $\boxed{\vec{v}\times\vec{B} = \left(-7\,\vec{i} + 12{,}1\,\vec{j} - 12{,}1\,\vec{k}\right)\times 10^{3}}$

Maintenant, il ne reste plus qu'à calculer la force magnétique :

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\,\vec{v}\times\vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{m}} = \left(-1{,}6\times 10^{-19}\right)\left(\left(-7\,\vec{i} + 12{,}1\,\vec{j} - 12{,}1\,\vec{k}\right)\times 10^{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{\mathrm{m}} = \left(1{,}12\,\vec{i} - 1{,}94\,\vec{j} + 1{,}94\,\vec{k}\right)\times 10^{-15}\ \mathrm{N}} \qquad \textbf{(a)}$$

On peut maintenant évaluer le module de la force magnétique:

$$F_{\mathrm{m}} = \left|\vec{F}_{\mathrm{m}}\right| \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{m}} = 10^{-15}\sqrt{\left(1{,}12\right)^{2} + \left(-1{,}94\right)^{2} + \left(1{,}94\right)^{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_{\mathrm{m}} = 2{,}963\times 10^{-15}\ \mathrm{N}} \qquad \textbf{(b)}$$