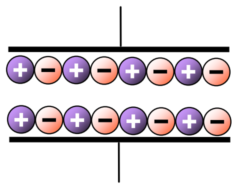
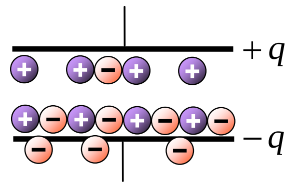
Chapitre 2.8 – Les condensateurs

Le condensateur

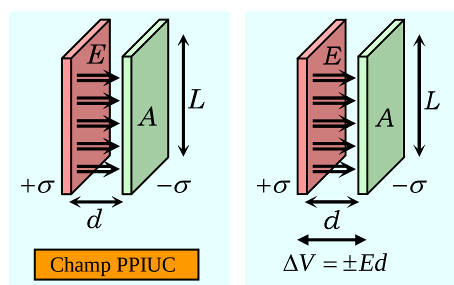
Le condensateur est une structure conductrice constituée de deux armatures séparées par un isolant. Un condensateur est dit « chargé » lorsqu’il y a une charge électrique $+q$ sur une armature et une charge $-q$ sur l’autre armature. Par conséquent, un condensateur possède toujours une charge nulle, car il accumule une séparation de ses « propres charges électriques[1] ».

Condensateur non chargé	Condensateur chargé
	

De plus, l’ensemble des **charges accumulées** sur l’une ou l’autre des plaques sont toujours au **même potentiel**, car elles sont situées sur un conducteur. Augmenter la charge augmentera alors le potentiel et cette tâche sera toujours de plus en plus couteux énergiquement.

Champ électrique et différence de potentiel d’un condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux plaques de surface A séparées par une distance d. Lorsque le condensateur est chargé, la densité de charges surfacique σ des plaques augmente en raison d’une séparation de charge q entre les deux plaques ce qui a pour conséquence de produire un champ électrique $\vec{E}$. L’approximation de la PPIUC[2] est valide si la taille L de la plaque est très supérieure à la distance d.



La production du champ électrique $\vec{E}$ implique obligatoirement la production d’une différence de potentiel électrique entre les deux plaques. Elle peut être évaluée grâce à l’expression suivante :

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \vec{s} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \pm E d$$

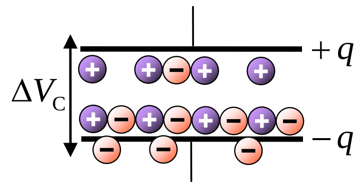
[1] La plaque positive qui donne un électron à son environnement engendre automatiquement et simultanément une acquisition par la plaque négative d’un électron. Ainsi, ce n’est pas réellement le même électron qui est échangé d’une plaque à l’autre.

[2] PPIUC est l’acronyme pour **p**laque **p**lane **i**nfinie **u**niformément **c**hargée.

La capacité

La capacité d'un condensateur idéal est la quantité de charges électriques qui peut être séparée dans un condensateur avant que la différence de potentiel aux bornes du condensateur augmente de un volt. Autrement dit, la capacité C est le rapport entre la charge q d'un condensateur et la différence de potentiel ΔV_C que l'on mesure aux bornes des deux armatures :

$$C = \frac{q}{\Delta V_C}$$



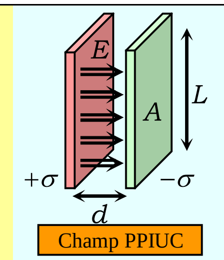
où C : Capacité en farads (F)

q : Charges électriques séparées dans le condensateur en coulomb (C)

ΔV_C : Différence de potentiel aux bornes du condensateur en volt (V)

Unité (farad) : $\mathrm{F} = [C] = \dfrac{[q]}{[\Delta V]} = \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{J/C}} = \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{J}} = \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}} = \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{kg\,m/s^2 m}} = \dfrac{\mathrm{C}^2\,\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg\,m}^2}$

Situation 1 : *La capacité d'un gros condensateur plan.* On considère le montage constitué de deux planques situées à 15 cm l'une de l'autre portant des densités de charge surfacique de $\pm 2{,}5\times10^{-9}\,\mathrm{C/m^2}$. On suppose que chaque plaque est un carré qui mesure 3 m de côté. On désire déterminer (a) la charge du condensateur ainsi formé ; (b) la différence de potentiel entre les plaques et (c) la capacité du condensateur.



Évaluons la surface de la plaque carrée de taille L :

$A = L^2 \quad \Rightarrow \quad A = (3)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 9\ \mathrm{m^2}}$

Évaluons la charge sur les plaques :

$q = \sigma A \quad \Rightarrow \quad q = (\pm 2{,}5\times10^{-9})(9) \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = \pm 2{,}25\times10^{-8}\,\mathrm{C}}$ **(a)**

Évaluons le champ électrique généré entre les deux plaques :

$E = 2E_{\text{plaque}} \quad \Rightarrow \quad E = 2\left(\dfrac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\right)$ (Champ plaque : $E = \dfrac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$)

$\Rightarrow \quad E = \dfrac{|(2{,}5\times10^{-9})|}{(8{,}85\times10^{-12})}$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{E = 282{,}5\ \mathrm{N/C}}$ (Évaluer E)

Évaluons la différence de potentiel ΔV entre les deux plaques :

$$\Delta V = -\vec{E}\cdot\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \pm E_{//} s \qquad \text{(Évaluer le produit scalaire)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \pm (E)(d) \qquad \text{(Remplacer } E_{//} = E \text{ et } s = d\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \pm (282{,}5)(0{,}15) \qquad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

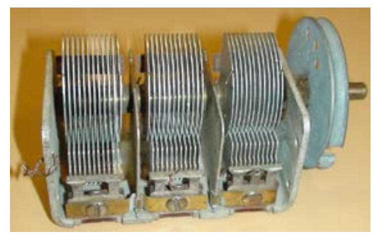
$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta V = \pm 42{,}37 \ \text{V}} \qquad \textbf{(b)}$$

Évaluons la capacité du condensateur :

$$C = \frac{q}{\Delta V_{\text{C}}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{(2{,}25\times 10^{-8})}{(42{,}37)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 5{,}31\times 10^{-10}\,\text{F}} \qquad \textbf{(c)}$$

La capacité d'un condensateur plan

Puisque la capacité d'un condensateur est une propriété géométrique du condensateur, nous pouvons ainsi déterminer la capacité C_{vide} d'un condensateur plan de surface A dont les plaques sont séparées par une distance d à l'aide d'un vide grâce à l'expression suivante :



Condensateur plan variable

$$C_{\text{vide}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

où C_{vide} : Capacité du condensateur plan (avec vide) en farad (F).

A : Surface des deux plaques en mètre carré (m^2).

d : Distance séparant les deux plaques en mètre (m).

ε_0 : La constante électrique (*permittivité du vide*), $\varepsilon_0 = 8{,}85\times 10^{-12}\,\text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$.

Preuve :

Considérons un condensateur plan de surface A dont les plaques sont séparées par une distance d et chargées avec une densité de charge surfacique σ. Évaluons la capacité C du condensateur à partir de la définition de la capacité :

$$C = \frac{q}{\Delta V} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{(|\sigma| A)}{(E\,d)} \qquad \text{(Remplacer } q = \sigma A \text{ et } \Delta V = E\,d\text{)}$$

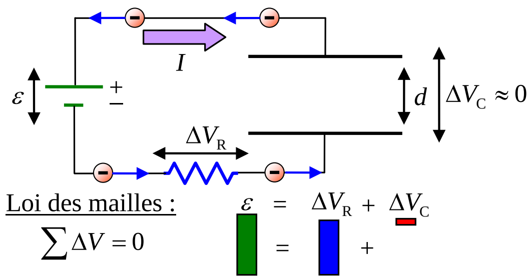
$$\Rightarrow \quad C = \frac{|\sigma| A}{\left(2\dfrac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\right)d} \qquad \text{(Remplacer } E = 2E_{plaque} = 2\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad C_{\text{vide}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad \blacksquare \qquad \text{(Simplification)}$$

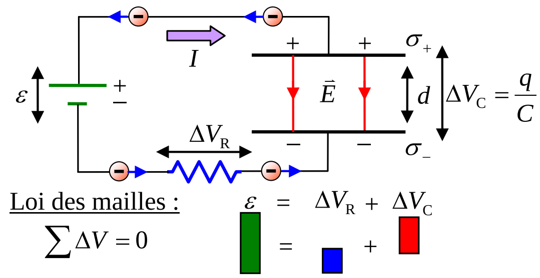
Chargement d'un condensateur à l'aide d'une pile

Lorsqu'un condensateur est branché à une pile d'électromotance[3] ε, celui-ci se fait chargé sous l'action de la pile. Initialement, la charge du condensateur est faible et la différence de potentiel ΔV_C requise pour séparer les charges sur les deux armatures est petite.

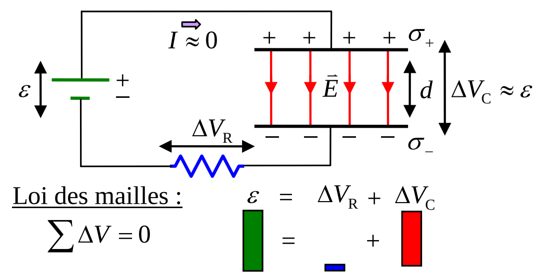
Le rôle de la pile est de fournir la différence de potentiel ΔV_C requise pour séparer les charges aux bornes du condensateur. L'électromotance restante fournie par la pile est alors dépensée[4] pour faire circuler les charges dans le circuit. Cette différence de potentiel est causée par la résistance à l'établissement du courant dans le circuit que l'on définira comme étant ΔV_R [5].



Plus le temps s'écoule, plus le condensateur se charge et plus il en est couteux en différence de potentiel ΔV_C pour séparer les charges. Ceci provoque un ralentissement du chargement du condensateur, car il y a moins de différence de potentiel accordé à ΔV_R et donc moins de courant I.



Lorsque la différence de potentiel aux bornes du condensateur ΔV_C atteint ε, la pile n'est plus en mesure de charger davantage le condensateur et celui-ci atteint sa charge maximale. Le courant I est alors nul. L'électromotance de la pile est alors dépensée pour maintenir les charges séparées dans le condensateur.



En résumer, le **travail infinitésimal** qu'effectue la **pile** pour séparer les charges dq est dépensé pour **charger le condensateur** et pour faire **circuler le courant.** La distribution de l'énergie fournie par la pile varie tout au long du chargement :

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_R + \mathrm{d}W_C \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\,\mathrm{d}q = \Delta V_R\,\mathrm{d}q + \Delta V_C\,\mathrm{d}q \quad \text{où} \quad \Delta V_C = q / C$$

---

[3] L'électromotance d'une pile est la différence de potentiel que produit une pile lorsqu'elle est branchée dans un circuit fermé. La réaction chimique produit une séparation de charges aux bornes de la pile ce qui a pour effet de séparer les charges sur les armatures du condensateur.

[4] Selon la loi des mailles de Kirchhoff, la somme des différences de potentiel rencontrée dans un circuit électrique sur un parcours fermé est toujours égale à zéro.

[5] Lorsque la résistance équivalente du circuit est ohmique, la relation entre la résistance R du circuit et le courant I est établie par la loi d'ohm : $\Delta V = R\,I$.

L'énergie potentielle électrique emmagasinée dans un condensateur

L'énergie potentielle électrique U_e emmagasinée dans un condensateur correspond à la somme des énergies potentielles résultantes d'une séparation de charges q qui dépend de la capacité C du condensateur et de la différence de potentiel ΔV_C mesurée aux bornes du condensateur :

$$U_e = \frac{1}{2} C \, \Delta V_C^{\,2} \qquad U_e = \frac{1}{2} q \, \Delta V_C \qquad U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

où U_e : Énergie potentielle électrique emmagasinée dans le condensateur (J)
C : Capacité du condensateur (F)
q : Charge électrique accumulée par le condensateur (C) ($q = C\Delta V$)
ΔV : Différence de potentiel aux bornes du condensateur (V)

<u>Preuve :</u>

Évaluons le travail W_C qu'effectue la pile uniquement pour séparer q charges d'une armature à une autre dans un condensateur de capacité *C*. Cette énergie sera égale à l'énergie potentielle électrique U_e emmagasinée dans le condensateur :

$W_C = \int \mathrm{d}W_C \Rightarrow W_C = \int \Delta V_C \, \mathrm{d}q$ (Travail infinitésimal : $\mathrm{d}W_C = \mathrm{d}q \, \Delta V_C$)

$\Rightarrow W_C = \int \left(\frac{q}{C} \right) \mathrm{d}q$ (Remplacer $C = q / \Delta V_C \Rightarrow \Delta V_C = q / C$)

$\Rightarrow W_C = \frac{1}{C} \int q \, \mathrm{d}q$ (Factoriser les constantes)

$\Rightarrow W_C = \frac{1}{C} \int_{q=0}^{q} q \, \mathrm{d}q$ (Bornes : $q = 0 \rightarrow q$)

$\Rightarrow W_C = \frac{1}{C} \left[\frac{q^2}{2} \right]_0^q$ (Résoudre l'intégrale : $\int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$)

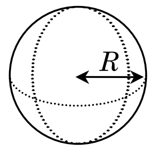
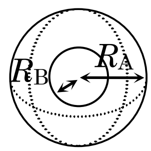
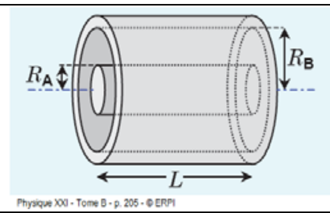
$\Rightarrow W_C = \frac{q^2}{2C}$ (Évaluer les bornes de l'intégrale)

$\Rightarrow W_C = \frac{C}{C} \frac{q^2}{2C}$ (Multiplier par 1)

$\Rightarrow U_e = \frac{1}{2} C \, \Delta V_C^{\,2}$ ■ (Remplacer $\Delta V_C = q / C$ et $W_C = U_e$)

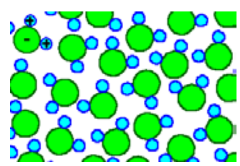
La capacité de différent condensateur

Voici la capacité de différent type de condensateur :

Géométrie	Schéma	Capacité
Sphère conductrice		$C = \dfrac{R}{k}$
Coquille conductrice (rayon externe R_A et rayon interne R_B)		$C = \dfrac{R_A R_B}{k(R_B - R_A)}$
Câble coaxial (rayon interne R_A et rayon externe R_B)		$C = \dfrac{L}{2k\ln(R_B / R_A)}$

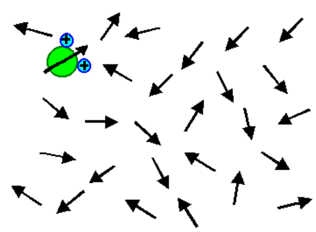
Diélectrique

Un matériau diélectrique est un isolant électrique contenant des structures polaires[6].



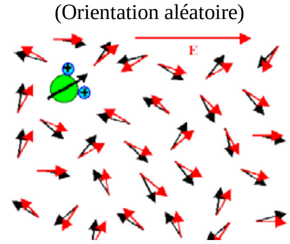
(Eau)

Lorsque ce matériau est plongé dans un champ électrique externe $\vec{E}_{ext} = 0$, toutes les structures polaires sont alignées dans des directions aléatoires produisant un champ électrique interne $\vec{E}_{int}$ total égale à zéro (ils s'annulent par principe de superposition).



(Orientation aléatoire)

Lorsque ce matériau est plongé dans un champ électrique externe $\vec{E}_{ext} \neq 0$, les structures polaires s'alignent afin de produire globalement un champ électrique interne $\vec{E}_{int}$ dans la direction opposée au champ externe $\vec{E}_{ext}$. La superposition du champ $\vec{E}_{ext}$ et $\vec{E}_{int}$ produit une atténuation partielle[7] du champ externe $\vec{E}_{ext}$.



(Orientation alignée)

[6] Une structure polaire est un regroupement de charge totale égale à zéro dont leur positionnement produit un champ électrique non nul près de la structure.

[7] On peut comparer un diélectrique comme étant un « conducteur partiel ». Un conducteur possède toujours à l'équilibre un champ électrique interne nul et c'est seulement atténué chez le diélectrique.

L'atténuation du champ électrique est proportionnelle à la constante diélectrique K du matériau :

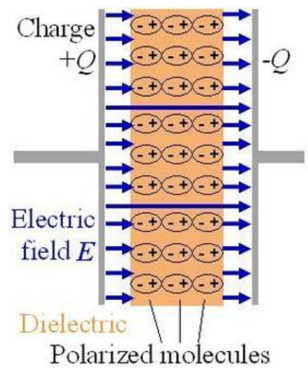
$$E = \frac{E_{\text{ext}}}{K}$$

où E : Module du champ électrique totale à l'intérieur du diélectrique (N/C)
E_{ext} : Module du champ électrique externe au diélectrique (N/C)
K : Constante diélectrique du matériau

Voici quelques constantes diélectriques :

Vide	Air	Mica	Diamant	Eau à 20°C
1	1,000 54	8	16,5	80

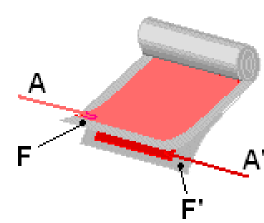
Condensateur et diélectrique isolant



Lorsqu'on dépose un diélectrique isolant à l'intérieur d'un condensateur, la réaction du diélectrique à la présence du champ électrique externe généré par les armatures du condensateur réduit le champ électrique à l'intérieur du condensateur. Ceci permet d'augmenter la capacité du condensateur C par un facteur égale la constante diélectrique K tout en maintenant une isolation électrique entre les deux plaques :

$$C = K\, C_{\text{vide}}$$

où C : Capacité du condensateur avec diélectrique (F)
K : Constance diélectrique du matériau à l'intérieur du condensateur
C_{vide} : Capacité du condensateur avec vide (F)



(Condensateur cylindrique avec feuille diélectrique isolante)

- Le diélectrique permet de maintenir séparé les deux plaques qui s'attirent en ne permettant pas de transfert de charge, car celui-ci est un isolant à la circulation des charges.
- Un diélectrique n'augmente pas la puissance d'un condensateur (il n'augmente pas ΔV). Il permet d'emmagasiner plus de charges et donc plus d'énergie ($U_{\text{e}} = q\Delta V$).
- Un diélectrique augmente la capacité du condensateur au détriment de sa stabilité, car le vide sera toujours le meilleur isolant. Un condensateur avec diélectrique est dont plus susceptible de « claquer » ce qui entraine une circulation de charges entre les deux plaques et un déchargement imprévu. La différence de potentiel électrique maximale que l'on peut avoir aux bornes d'un tel condensateur est alors limitée. Ainsi, la tension de service est égale à 80 % de la valeur maximale théorique.

Preuve :

À partir de la définition de la capacité d'un condensateur, introduisons un diélectrique à l'intérieur condensateur afin d'évaluer la nouvelle capacité :

$$C = \frac{q}{\Delta V} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \frac{q}{C} \qquad \text{(Isoler } \Delta V\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{q}{C} \qquad \left(\Delta V = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\int \frac{\vec{E}_{\mathrm{ext}}}{K} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{q}{C} \qquad \text{(Remplacer } \vec{E} = \vec{E}_{\mathrm{ext}} / K\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{K}\left(-\int \vec{E}_{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{s}\right) = \frac{q}{C} \qquad \text{(Factorise } 1/K\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{K}\Delta V_{\mathrm{vide}} = \frac{q}{C} \qquad \text{(Remplacer } \Delta V_{\mathrm{vide}} = -\int \vec{E}_{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{s}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad C = K \frac{q}{\Delta V_{\mathrm{vide}}} \qquad \text{(Isoler } C\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad C = K\, C_{\mathrm{vide}} \quad \blacksquare \qquad \text{(Capacité : } C = \frac{q}{\Delta V}\text{)}$$