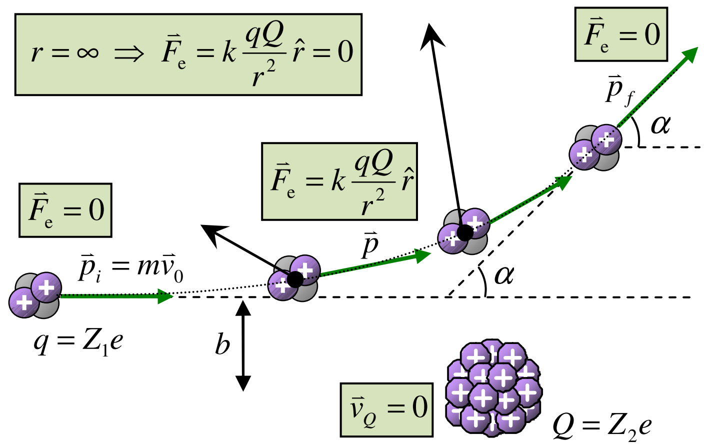
Chapitre 2.3b – La diffusion de Rutherford

La diffusion de Rutherford illustre la trajectoire d'une particule chargée q venant de l'infini se dirigeant vers une charge ponctuelle Q immobile (comme un noyau atomique) qui sera déviée d'un angle α sous l'effet de la répulsion de la force électrique coulombienne $\vec{F}_e$.

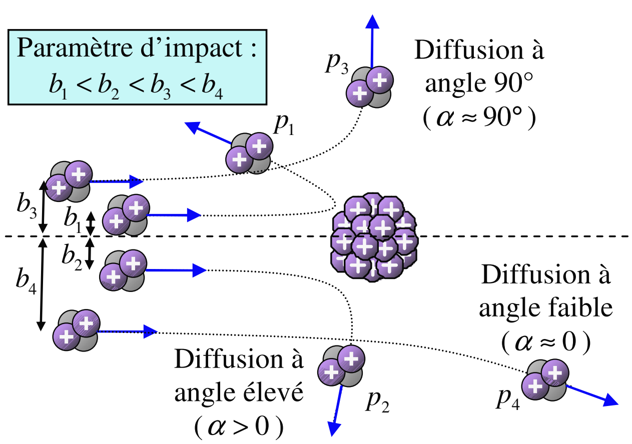
Dans le cas d'une diffusion sur un noyau atomique, cette trajectoire est valide uniquement lorsque la particule passe suffisamment loin du noyau pour négliger la force nucléaire.



$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\,\varepsilon_0 K_0 b}$$

où α : Angle de déviation de la particule sur le noyau de charges ponctuelles immobile
Z_1 : Numéro atomique de la particule (nombre de proton), $Z_1 \in \mathrm{N}$
Z_2 : Numéro atomique du noyau (nombre de proton), $Z_2 \in \mathrm{N}$
e : Charge élémentaire, $e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
ε_0 : Constante électrique, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$ ($\varepsilon_0 = 1/4\pi k$)
K_0 : Énergie cinétique de la particule (J)
b : Paramètre d'impact (m)

<u>Relation entre l'angle de diffusion et le paramètre d'impact (énergie K constante) :</u>



Graphique

en construction …

Preuve :

La diffusion de Rutherford est une **interaction élastique** (comparable à une collision élastique). Dans ce cas, nous pouvons affirmer par la conservation de l'énergie que **l'énergie cinétique est conservée** et que le **module de la quantité de mouvement est conservé** :

$$E_f = E_i + W_{\text{nc}} \quad \Rightarrow \quad E_f = E_i \qquad (W_{\text{nc}} = 0)$$

$$\Rightarrow \quad K_f + U_{\text{e}f} = K_i + U_{\text{e}i} \qquad (E = K + U_{\text{e}})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_f = K_i = K_0} \qquad \left(U_{\text{e}} = k\frac{qQ}{r_{i,f}} = k\frac{qQ}{\infty} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m{v_f}^2 = \frac{1}{2}m{v_i}^2 \qquad \left(K = \frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad mv_f = mv_i = mv_0 \qquad \text{(Simplifier)}$$

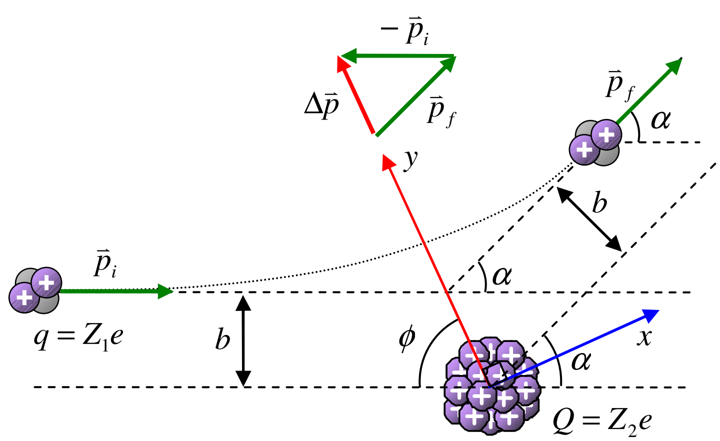
$$\Rightarrow \quad \boxed{\left|\vec{p}_f\right| = \left|\vec{p}_i\right| = p_0} \qquad p_0 = mv_0 = \left|\vec{p}_{i,f}\right|$$

Afin d'évaluer le plus simplement l'angle de déviation α de la particule, comparons la quantité de mouvement $\vec{p}$ initiale et finale. Définissons un axe x perpendiculaire à $\Delta\vec{p}$ et un axe y parallèle à $\Delta\vec{p}$ tel que :

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

et

$$\text{axe } x \perp \Delta\vec{p}, \quad \text{axe } y \ // \ \Delta\vec{p}$$



Nous utiliserons l'angle ϕ pour désigner l'orientation de l'axe y avec par rapport à $-\vec{p}_i$.

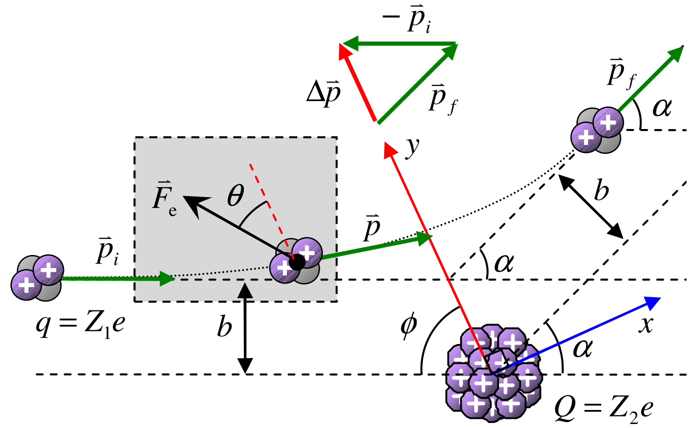
Puisque $\left|\vec{p}_f\right| = \left|\vec{p}_i\right| = p_0$ (interaction élastique), nous pouvons affirmer que :

Selon l'axe x	Selon l'axe y
$\Delta p_x = 0$	$\Delta p_y = \left|\Delta\vec{p}\right| = \left|\vec{p}_f - \vec{p}_i\right|$

Il est important de rappeler que la force électrique qui est responsable à elle seule de la variation de la quantité de mouvement est une force radiale de la forme suivante :

$$\vec{F}_{\text{e}} = k\frac{qQ}{r^2}\hat{r}$$

En utilisant la définition de l'impulsion $\vec{J}$, nous pouvons évaluer une expression reliant la variation de quantité de mouvement Δp_y selon l'axe y et la force électrique F_e appliquée sur la particule durant l'ensemble du mouvement :



$$\Delta p_y = J_y$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p_y = \int F_y \,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p_y = \int F_e \cos(\theta)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p_y = \int k\frac{qQ}{r^2}\cos(\theta)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p_y = kqQ\int \frac{1}{r^2}\cos(\theta)\mathrm{d}t \qquad \text{(Factoriser constante)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p_y = k(Z_1 e)(Z_2 e)\int \frac{1}{r^2}\cos(\theta)\mathrm{d}t \qquad \text{(Quantification charge : } q = Z\,e,\ Z \in \mathrm{N}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta p_y = kZ_1 Z_2 e^2 \int \frac{1}{r^2}\cos(\theta)\mathrm{d}t} \qquad \text{(Simplifier)}$$

La difficulté à résoudre cette intégrale réside dans l'expression des bornes de l'intégrale et dans le fait que

$$r = r(t) \qquad \text{et} \qquad \theta = \theta(t).$$

Pour régler cette difficulté, nous allons introduire une relation mathématique entre r, θ et t grâce à la définition du **moment cinétique** L_z de la particule.

Puisque la force électrique $\vec{F}_e$ est une force centrale ($\vec{F} = f(r)\hat{r}$), le moment de force[1] τ_e associé à la force électrique est nul puisque

$$\tau_e = r\,F_e \sin(\theta) = r\left(k\frac{qQ}{r^2}\right)\sin(0°) = 0 \quad \text{car} \quad r \;//\; F_e .$$

Ceci nous permet d'affirmer qu'il y a **conservation du moment cinétique**[2], car

$$\sum \tau_{z\,\mathrm{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum L_z = \text{constante}.$$

Ceci nous permet de calculer le moment cinétique L_z en différents points de la trajectoire tout en assurant qu'elle sera toujours de même valeur :

$$L_{z0} = L_z = \text{constante}$$

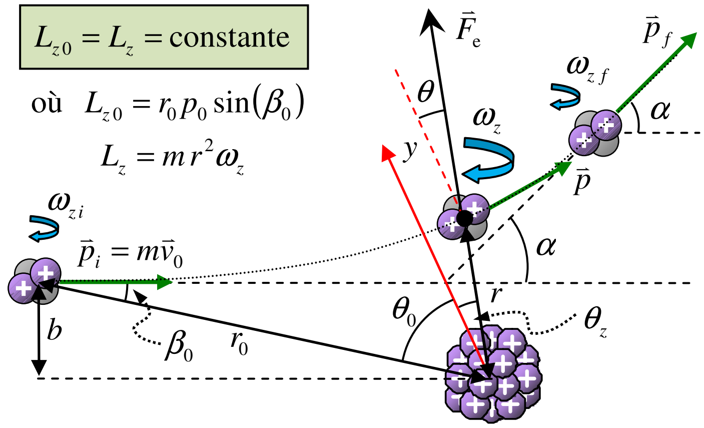
[1] Le moment de force a été discuté dans le section NYA – Chapitre 4.2 du cours de mécanique.
[2] Le moment cinétique a été discuté dans la section NYA – Chapitre 4.9 du cours de mécanique.

Évaluons le moment cinétique L_z sous les deux formes admissibles en deux lieux différents de la trajectoire en prenant comme point de référence la charge qui applique la force électrique :

$$\boxed{L_{z0} = L_z = \text{constante}}$$

où $L_{z0} = r_0 p_0 \sin(\beta_0)$

$L_z = m r^2 \omega_z$



<u>Particule :</u> (début de la trajectoire)

$$L_{z0} = r_0 p_0 \sin(\beta_0) \qquad (\beta_0 \text{ entre } r_0 \text{ et } p_0)$$

$$\Rightarrow \quad L_{z0} = r_0 (m v_0) \sin(\beta_0) \qquad (p_0 = m v_0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_{z0} = m v_0 b} \qquad (b = r_0 \sin(\beta_0))$$

<u>Corps :</u> (sur la trajectoire à distance $r \neq \infty$ de la charge Q)

$$L_z = I\omega_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_z = m r^2 \omega_z} \qquad (I = m r^2)$$

Puisque le moment cinétique est conservé dans le temps, la relation suivante est constante en tout temps :

$$L_{z0} = L_z \quad \Rightarrow \quad m v_0 b = m r^2 \omega_z$$

$$\Rightarrow \quad \omega_z = \frac{v_0 b}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta_z}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0 b}{r^2} \qquad \left(\text{Vitesse angulaire : } \omega_z = \frac{\mathrm{d}\theta_z}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{r^2}{v_0 b}} \qquad (\text{Inversion et notation : } \theta_z \equiv \theta)$$

Nous nous retrouvons alors avec l'intégrale suivante à résoudre :

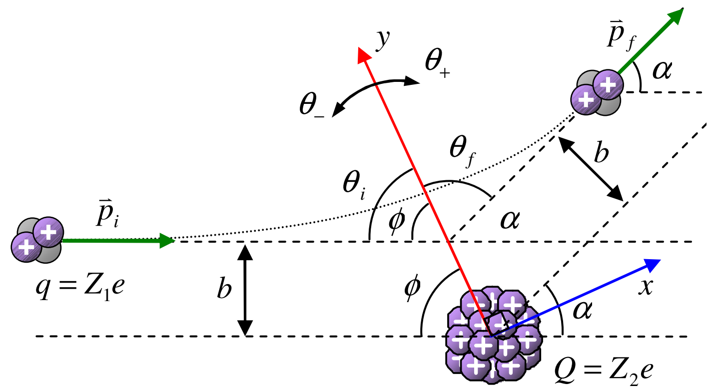
$$\Delta p_y = k Z_1 Z_2 e^2 \int \frac{1}{r^2} \cos(\theta) \mathrm{d}t \qquad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p_y = k Z_1 Z_2 e^2 \int \frac{1}{r^2} \cos(\theta) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} \mathrm{d}\theta \qquad \left(\text{Différentielle : } \mathrm{d}t(\theta) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p_y = k Z_1 Z_2 e^2 \int \frac{1}{r^2} \cos(\theta) \left(\frac{r^2}{v_0 b}\right) \mathrm{d}\theta \qquad \left(\text{Remplacer } \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{r^2}{v_0 b}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta p_y = \frac{k Z_1 Z_2 e^2}{v_0 b} \int \cos(\theta) \mathrm{d}\theta} \qquad (\text{Simplifier } r^2 \text{ et factoriser constante})$$

Évaluons les bornes de l'intégrale :



Lorsque la particule est à l'infini et quelle **s'approche** du noyau :

$$\theta \to \theta_i = -\phi$$

Lorsque la particule est à l'infini et quelle **s'éloigne** du noyau :

$$\theta \to \theta_f = \pi - \phi - \alpha$$

En évaluant l'intégrale à l'aide des bornes, nous obtenons le résultat suivant :

$$\Delta p_y = \frac{kZ_1Z_2e^2}{v_0 b}\int \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p_y = \frac{kZ_1Z_2e^2}{v_0 b}\left[\sin(\theta)\right]_{\theta_i}^{\theta_f} \qquad \left(\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)\right)$$

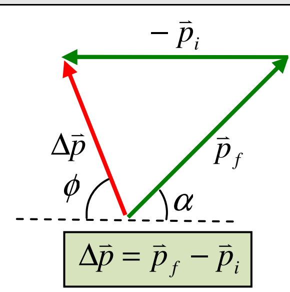
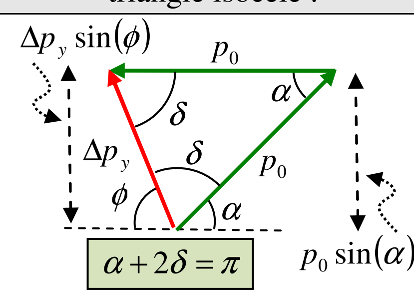
$$\Rightarrow \quad \Delta p_y = \frac{kZ_1Z_2e^2}{v_0 b}\left(\sin(\theta_f) - \sin(\theta_i)\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p_y = \frac{kZ_1Z_2e^2}{v_0 b}\left(\sin(\pi - \phi - \alpha) - \sin(-\phi)\right) \qquad \text{(Remplacer } \theta_i = -\phi \text{ et } \theta_f = \pi - \phi - \alpha\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p_y = \frac{kZ_1Z_2e^2}{v_0 b}\left(\sin(\phi + \alpha) - \sin(-\phi)\right) \qquad \text{(Identité trigo : } \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta p_y = \frac{kZ_1Z_2e^2}{v_0 b}\left(\sin(\phi + \alpha) + \sin(\phi)\right)} \qquad \text{(Identité trigo : } \sin(-\theta) = -\sin(\theta)\text{)}$$

Évaluons maintenant une expression pour la variation de quantité de mouvement Δp_y selon l'axe *y*. Puisque le module de la quantité de mouvement de la particule avant la diffusion et après la diffusion demeure le même ($|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = p_0$), nous pouvons construire un **triangle isocèle** de quantité de mouvement reliant nos paramètres angulaires α et ϕ :

Relation	Schéma de l'équation de la variation de $\vec{p}$:	Schéma de la relation du triangle isocèle :
$\Delta p_y \sin(\phi) = p_0 \sin(\alpha)$		

Évaluons une relation mathématique entre α et ϕ :

$$\phi = \pi - \delta - \alpha \quad \Rightarrow \quad \phi = \pi - \left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) - \alpha \qquad \text{(Utiliser } \alpha + 2\delta = \pi \text{, remplacer } \delta\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}} \qquad \text{(Simplifier)}$$

Réexprimons l'expression $\sin(\phi)$ en fonction de α :

$$\sin(\phi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin(\phi) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad \text{(Identité : } \sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)\text{)}$$

Exprimons Δp_y en retirant la référence à ϕ qui fut introduit pour simplifier le calcul de l'impulsion :

$$\Delta p_y \sin(\phi) = p_0 \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \Delta p_y = p_0 \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\phi)} \qquad \text{(Isoler } \Delta p_y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta p_y = m v_0 \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\phi)}} \qquad \text{(Remplacer } p_0 = m v_0\text{)}$$

Combinons maintenant le tout afin d'évaluer l'angle de déviation α de la particule en fonction du paramètre d'impact b et l'énergie cinétique K de la particule :

$$\Delta p_y = \frac{k Z_1 Z_2 e^2}{v_0 b}\left(\sin(\phi + \alpha) + \sin(\phi)\right) \qquad \text{(Résultat précédent)}$$

$$\Rightarrow \quad m v_0 \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\phi)} = \frac{k Z_1 Z_2 e^2}{v_0 b}\left(\sin(\phi + \alpha) + \sin(\phi)\right) \qquad \text{(Remplacer } \Delta p_y = m v_0 \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\phi)}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\phi)} = \frac{k Z_1 Z_2 e^2}{m v_0^2 b}\left(\sin(\phi + \alpha) + \sin(\phi)\right) \qquad \text{(Remplacer } \Delta p_y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\phi)} = \frac{k Z_1 Z_2 e^2}{2 K_0 b}\left(\sin(\phi + \alpha) + \sin(\phi)\right) \qquad \text{(Introduire } K = \frac{1}{2} m v_0^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\phi)} = \frac{k Z_1 Z_2 e^2}{2 K_0 b}\left(\sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \alpha\right) + \sin(\phi)\right) \qquad \text{(Remplacer } \phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\phi)} = \frac{k Z_1 Z_2 e^2}{2 K_0 b}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + \sin(\phi)\right)} \qquad \text{(Simplifier)}$$

Appliquons une série d'identité trigonométrique afin d'obtenir la forme voulue :

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\phi)} = \frac{kZ_1Z_2e^2}{2K_0b}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin(\phi)\right)$$ (Équation précédente)

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\phi)} = \frac{kZ_1Z_2e^2}{2K_0b}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin(\phi)\right)$$ (Identité : $\sin(\pi/2+\theta)=\cos(\theta)$)

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(\alpha)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{kZ_1Z_2e^2}{2K_0b}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$ (Remplacer $\sin(\phi)=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$)

$$\Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{kZ_1Z_2e^2}{K_0b}\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$ (Simplifier 2, isoler $\sin(\alpha)$)

$$\Rightarrow \quad \sin\left(2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{kZ_1Z_2e^2}{K_0b}\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$ (Réécriture : $\alpha = 2\frac{\alpha}{2}$)

$$\Rightarrow \quad 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{kZ_1Z_2e^2}{K_0b}\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$ (Identité : $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)$)

$$\Rightarrow \quad 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{kZ_1Z_2e^2}{K_0b}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$ (Simplifier $\cos(\alpha/2)$)

$$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{kZ_1Z_2e^2}{2K_0b}$$ (Identité : $\tan(\theta)=\sin(\theta)/\cos(\theta)$)

$$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{Z_1Z_2e^2}{8\pi\varepsilon_0K_0b} \qquad \blacksquare$$ (Remplacer $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$)

Exercice A : ***La position d'un détecteur*.**

En construction …