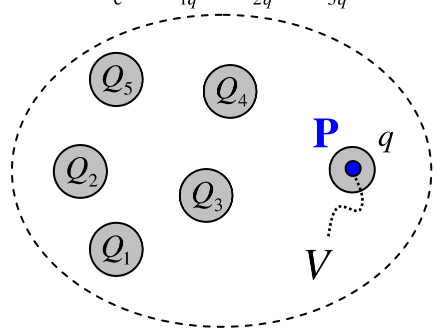
Chapitre 2.2a – Le potentiel électrique généré par des particules chargées

Le potentiel électrique

$$U_e = U_{1q} + U_{2q} + U_{3q} + \ldots$$



Le potentiel électrique V généré par un ensemble de charges Q_i à un point **P** de l'espace correspond à l'énergie potentielle électrique U_e partagée par les charges Q_i avec une charge q situé au point **P** divisée par la charge q elle-même.

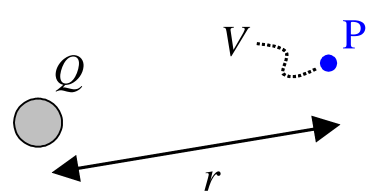
Lorsqu'une charge q est située au point **P**, l'énergie quelle partage avec son environnement sera le produit du potentiel électrique V évalué au point **P** multiplié par la charge q :

$$V = \frac{U_e}{q} \quad \text{ou} \quad U_e = qV$$

où V : Potentiel électrique évalué à l'endroit où la charge q est située en volt (V)
U_e : Énergie potentielle électrique entre la charge q et les charges Q_i en joule (J)
q : Charge de la particule située dans le potentiel électrique en coulomb (C)

Potentiel électrique d'une charge ponctuelle

Le potentiel électrique V généré par une charge ponctuelle Q décroît en fonction de la distance r qui sépare la charge Q de l'endroit **P** où le potentiel électrique est évalué :



$$V = k\frac{Q}{r}$$

où V : Potentiel électrique produit par la charge Q en volt(V) (lorsque $r = \infty$, $V_\infty = 0$)
Q : Charge qui produit le potentiel électrique en coulomb (C)
r : Distance entre la charge Q et le point **P** en mètre (m)
k : Constante de la loi de Coulomb, $k = 9{,}00 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

<u>Preuve :</u>

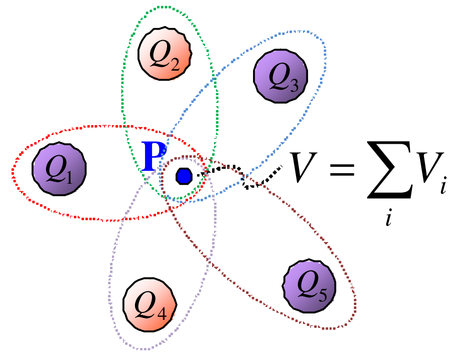
Considérons deux charges ponctuelles q et Q séparées par une distance r. Évaluons le potentiel électrique V produit par la charge Q à l'endroit où est située la charge q à partir de l'énergie potentielle électrique du système charge ponctuelle q et Q :

$$U = k\frac{qQ}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{q} = k\frac{Q}{r} \qquad \text{(Diviser par la charge } q\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad V = k\frac{Q}{r} \quad \blacksquare \qquad \text{(Remplacer } V = U/q\text{)}$$

Superposition du potentiel électrique de charges ponctuelles

En appliquant le principe de superposition au concept de potentiel électrique, nous obtenons l'expression suivant pour évaluer le potentiel électrique total V d'une distribution de charges ponctuelles Q_i en un point **P** de l'espace :



$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i = \sum_{i=1}^{N} k \frac{Q_i}{r_i}$$

où V : Potentiel électrique total généré par les N charges Q_i en volt (V)

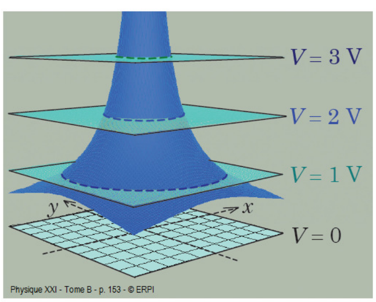
Q : Charge qui produit le potentiel électrique en coulomb (C)

r : Distance entre la charge Q et le point **P** en mètre (m)

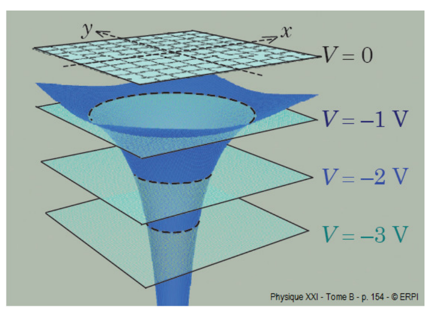
k : Constante de la loi de Coulomb, $k = 9{,}00 \times 10^9 \ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

Graphique du potentiel électrique

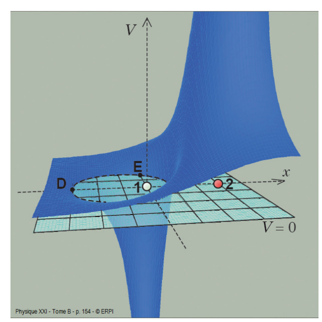
Puisque le potentiel électrique correspond mathématiquement à un champ scalaire, la cartographie du potentielle électrique en deux dimensions nécessite une représentation en trois dimensions : deux dimensions pour la localisation (x,y) et une dimension pour la valeur du potentiel V attribuée.



(charge positive génère du potentiel positif)

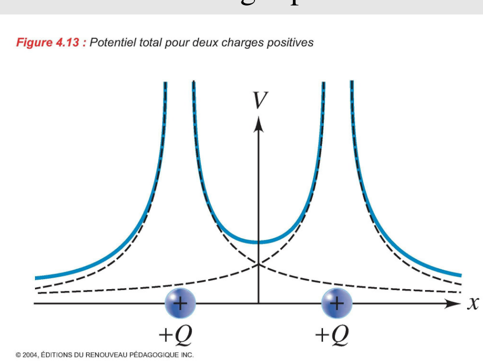
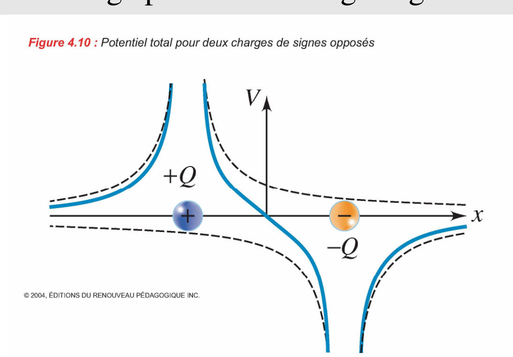


(charge négative génère du potentiel négatif)



(superposition du potentiel)

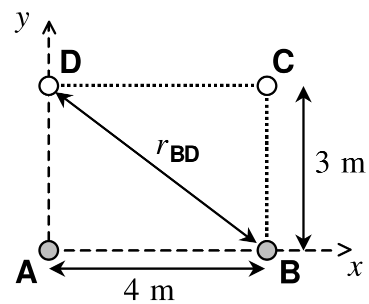
Voici une représentation graphique du principe de superposition du potentiel électrique :

Deux charges positives	Charge positive et charge négative
	

Situation X : ***La superposition des potentiels*.** Dans un plan *xy*, on fixe une particule **A** de charge +1 μC à l'origine, une particule **B** de charge +2 μC en (x = 4 m, y = 0 m), une particule **C** de charge -3 μC en (x = 4 m, y = 3 m) et une particule **D** de charge -4 μC en (x = 0 m, y = 3 m). On désire déterminer le potentiel électrique à l'endroit où se trouve la particule **D.**

Voici la représentation de la situation.

- $Q_{\text{A}} = 1\times 10^{-6}\,\text{C}$
- $Q_{\text{B}} = 2\times 10^{-6}\,\text{C}$
- $Q_{\text{C}} = -3\times 10^{-6}\,\text{C}$
- $r_{\text{AD}} = 3\ \text{m}$
- $r_{\text{BD}} = \sqrt{(4)^2 + (3)^3} = 5\ \text{m}$
- $r_{\text{CD}} = 4\ \text{m}$



Nous remarquons que la particule **D** ne contribue pas au potentiel, car $r = 0$.

Avec la définition du potentiel d'une charge ponctuelle, évaluons le potentiel au point D :

- $V_{\text{A}} = k\dfrac{Q_{\text{A}}}{r_{\text{AD}}} = (9\times 10^9)\dfrac{(1\times 10^{-6})}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{A}} = 3000\ \text{V}}$
- $V_{\text{B}} = k\dfrac{Q_{\text{B}}}{r_{\text{BD}}} = (9\times 10^9)\dfrac{(2\times 10^{-6})}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{B}} = 3600\ \text{V}}$
- $V_{\text{C}} = k\dfrac{Q_{\text{C}}}{r_{\text{CD}}} = (9\times 10^9)\dfrac{(-3\times 10^{-6})}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{C}} = -6750\ \text{V}}$

À partir du principe de superposition, évaluons le potentiel total au point D :

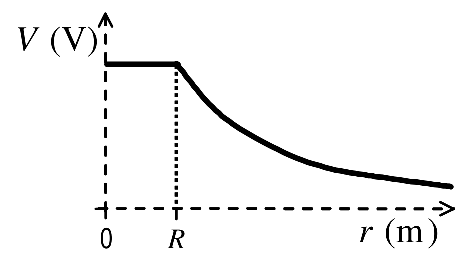
$$V = \sum_i V_i \quad \Rightarrow \quad V = V_{\text{A}} + V_{\text{B}} + V_{\text{C}}$$

$$\Rightarrow \quad V = (3000) + (3600) + (-6750)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V = -150\ \text{V}}$$

Le potentiel électrique généré par une coquille sphérique uniformément chargée

Le potentiel électrique V généré par une coquille sphérique uniformément chargée de charge totale Q_{tot} est équivalent au potentiel électrique généré par une charge ponctuelle unique Q_{tot} située au centre de la sphère. Le potentiel électrique diminue en fonction de la distance r si l'on évalue le potentiel à l'extérieur de la sphère et est constante à l'intérieur de la sphère égal à la valeur à la surface de la sphère :



(Graphique du potentiel électrique généré par une coquille uniformément chargée positivement de rayon R).

À l'extérieur de la sphère : ($r > R$)

$$V = k\frac{Q_{\text{tot}}}{r}$$

À l'intérieur de la sphère : ($r < R$)

$$V = k\frac{Q_{\text{tot}}}{R}$$

Preuve :

La preuve sera présentée dans la section 2.7.

L'électronvolt

L'électronvolt correspond à l'énergie électrique d'un électron lorsqu'il est situé dans un potentiel électrique de un volt. Cette unité est régulièrement utilisée dans le domaine de la physique des particules.

Unité (électronvolt) : $[E] = \text{eV}$ Correspondance : $1\ \text{eV} = 1{,}6\times10^{-19}\ \text{J}$

L'énergie potentielle électrique d'une distribution de charges

Pour évaluer l'énergie potentielle électrique totale U_{e} d'une distribution de charges, il suffit d'évaluer l'énergie d'assemblage du système. En intégrant une particule à la fois au système, on ajoute un terme d'énergie égal au potentiel électrique V généré par les particules déjà assemblées à l'emplacement où sera située la nouvelle particule ajoutée multiplié par la charge dq ajoutée :

$$U_{\text{e}} = \int V\,\mathrm{d}q$$

où U_{e} : Énergie potentielle électrique totale du système (J)

V : Potentiel électrique évalué à l'endroit où la charge dq sera ajoutée au système (V)

dq : Charge ajoutée au système (C)

Situation A : *L'énergie d'une sphère chargée*. Une sphère conductrice de 20 cm de rayon initialement neutre se fait charger à -4 μC à l'aide de charges négatives provenant d'une mise à la terre (considéré comme venant de très loin). On désire évaluer l'énergie potentielle électrique totale associée au système de charges sur la sphère.

Puisque le champ électrique généré par une sphère chargée est identique à celui d'une charge ponctuelle, nous pouvons affirmer que le potentiel électrique généré par une sphère est égal à l'expression suivante sur l'ensemble de la surface de la sphère de rayon r :

$$V = k\frac{q}{r}$$

Évaluons l'énergie potentielle électrique totale de la sphère sachant que le potentiel électrique qu'elle génère augment à mesure que la charge augmente sur celle-ci :

$$U_e = \int dqV \quad \Rightarrow \quad U_e = \int dq\left(\frac{kq}{r}\right) \qquad \text{(Potentiel : } V = \frac{kq}{r}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad U_e = \frac{k}{r}\int q\,dq \qquad \text{(Factoriser constantes)}$$

$$\Rightarrow \quad U_e = \frac{k}{r}\int_{q=0}^{Q} q\,dq \qquad \text{(Poser les bornes)}$$

Évaluons l'intégrale afin de déterminer une expression générale pour l'énergie potentielle électrique d'une sphère et appliquons ce résultat à une sphère de rayon r = 20 cm et de charge Q = -4 μC :

$$U_e = \frac{k}{r}\int_{q=0}^{Q} q\,dq \Rightarrow \quad U_e = \frac{k}{r}\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^Q \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad U_e = \frac{k}{r}\left(\frac{(Q)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U_e = \frac{kQ^2}{2r}} \qquad \text{(Solution générale)}$$

$$\Rightarrow \quad U_e = \frac{(9\times10^9)(-4\times10^{-6})^2}{2(0,20)} \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U_e = 0,36 \text{ J}} \qquad \text{(Calcul)}$$

Énergie d’un système de *N* particules et potentiel électrique

À l’aide de la définition du potentiel électrique, nous pouvons définir une nouvelle expression mathématique pour évaluer l’énergie potentielle électrique d’un système. Cette équation consiste à évaluer le potentiel électrique généré par la collection des charges à un endroit où il y a une charge électrique et d’effectuer qV et de le faire pour l’ensemble des charges :

$$U_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

où U_{e} : Énergie potentielle électrique totale du système (J)

q_i : Charge électrique de la particule i (C)

V_i : Potentiel électrique généré par l’ensemble des *N* particules excluant la particule *i* à l’endroit où est située la particule *i* (V)

N : Nombre de particules chargée, $N \geq 2$

<u>Preuve :</u>

À partir de l’équation de l’énergie d’un système de *N* particules, retirons la contrainte $i < j$ qui permet d’éviter de compter deux fois le terme d’énergie U_{ij} et U_{ji} et évaluons l’énergie du système deux fois. N’oublions pas que le terme U_{ij} lorsque $i = j$ ne doit pas être considéré car une particule ne peut pas générer un potentiel électrique où elle est situé, car $r = 0$.

Sous cette forme, nous pouvons introduire une référence au potentiel électrique V_i généré par un ensemble de *N*-1 particules (tous sauf la particule *i*) à l’endroit où est située la particule *i* :

$$U_{\mathrm{e}} = \sum_{i<j} U_{ij} \quad \Rightarrow \quad 2U_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} U_{ij}$$

(Retirer la contrainte $i < j$ et doubler U_{e}, $i \neq j$)

$$\Rightarrow \quad 2U_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} k\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

(Remplacer $U_{ij} = k\dfrac{q_i q_j}{r_{ij}}$)

$$\Rightarrow \quad 2U_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} k\frac{q_j}{r_{ij}}$$

(Factoriser de la sommation en *j* le terme q_i)

$$\Rightarrow \quad 2U_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

(Potentiel en *i* : $V_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} k\dfrac{q_j}{r_{ij}}$)

$$\Rightarrow \quad U_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i \quad \blacksquare$$

(Isoler U_{e})

Exercices

2.2.1 Le potentiel et l'énergie potentielle. Un proton est situé à 20 cm d'une particule alpha (noyau d'hélium, $q = +2e$). **(a)** Quel est le potentiel généré par le proton à l'endroit où se trouve la particule alpha ? **(b)** Quelle est l'énergie potentielle du système composé du proton et de la particule alpha ?

2.2.6 Quatre points sur l'équipotentielle $V = 0$. Dans le plan xy, on fixe une particule **A** de +1 μC à l'origine et une particule **B** de -2 μC en (x = 4 m ; y = 0). **(a)** À quel(s) endroit(s) le long de l'axe x le potentiel est-il nul ? **(b)** À quel(s) endroit(s) le long de l'axe y le potentiel est-il nul ?

Solutions

2.2.1 Le potentiel et l'énergie potentielle.

(a) $Q = e = 1{,}6\times10^{-19}\,\text{C}$

$r = 20\ \text{cm} = 0{,}20\ \text{m}$

$$V_p = k\frac{Q}{r} = \left(9\times10^{9}\right)\frac{\left(1{,}6\times10^{-19}\right)}{(0{,}20)} = 7{,}2\times10^{-9}\,\text{V}$$

(b) $q = 2e = 3{,}2\times10^{-19}\,\text{C}$ $\qquad U_{ph} = qV_p = \left(3{,}2\times10^{-19}\right)\left(7{,}2\times10^{-9}\right) = 2{,}3\times10^{-27}\,\text{J}$

2.2.6 Quatre points sur l'équipotentielle $V = 0$.

REMARQUE : CETTE SOLUTION EST CONSTRUITE AVEC D'AUTRES VALEURS DE CHARGE !!!!

$\vec{r}_A = 0$ m $\qquad Q_A = -3\times10^{-6}$ C

$\vec{r}_B = 4\ \vec{i}$ m $\qquad Q_B = 4\times10^{-6}$ C

$r_C = ?\ \vec{i}$ m

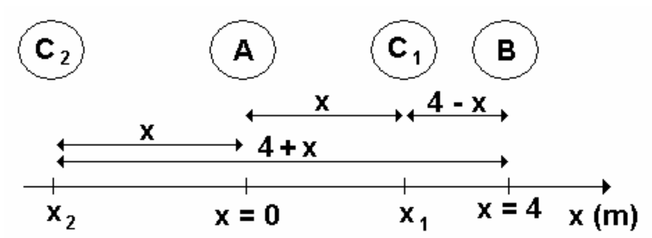
Pour obtenir un potentiel électrique nul au point **C**, il faut respecter cette équation :

$$\sum_i V_i = V_A + V_B = k\frac{Q_A}{r_{AC}} + k\frac{Q_B}{r_{BC}} = 0$$

On peut formuler les distances r par deux méthodes :

$$r_{AC} = x \qquad r_{BC} = 4 \pm x$$

Où :



Ainsi :

$$k\frac{Q_A}{r_{AC}} + k\frac{Q_B}{r_{BC}} = \frac{Q_A}{r_{AC}} + \frac{Q_B}{r_{BC}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\left(-3\times10^{-6}\right)}{x} + \frac{\left(4\times10^{-6}\right)}{4\pm x} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{4}{4\pm x} = \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad 4x = 3(4\pm x) \qquad \Rightarrow \qquad 4x = 12 \pm 3x$$

$$\Rightarrow \qquad x = 12 \quad (+) \qquad \text{ou} \qquad 7x = 12 \quad (-)$$

$$\Rightarrow \qquad x = 12\ \text{m}\ (+) \qquad \text{ou} \qquad x = 1{,}71\ \text{m}\ (-)$$

Réponses :

$$x = \{-12\ \text{m},\ 1{,}71\ \text{m}\}$$