Chapitre 1.8d – Le champ électrique d'une tige par intégration : non uniforme

Calculer le champ électrique avec une densité de charge non uniforme

Nous avons déterminé précédemment que le champ électrique d'une distribution infinitésimale de charge peut être calculé grâce à l'équation

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} \qquad \text{où} \qquad \mathrm{d}\vec{E} = k\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}$$

si les charges infinitésimale $\mathrm{d}Q$ sont ponctuelles. Pour réaliser ce calcul, il faut être capable de localiser les charges $\mathrm{d}Q$ dans un système de coordonnées (comme *xyz* en coordonnée cartésienne) et faire correspondre les paramètres r et $\hat{r}$ dans ce système de coordonnées afin de restructurer l'équation sous la forme d'une fonction pour y réaliser l'intégrale. Les bornes de l'intégrale seront définies à l'aide des positions des charges.

Cependant, si la distribution de charges n'est pas uniforme, alors la quantité de charge $\mathrm{d}Q$ dépendra de la position et sera alors un fonction de la position de la charge. Ainsi, en coordonnée cartésienne, nous aurons une expression tel que

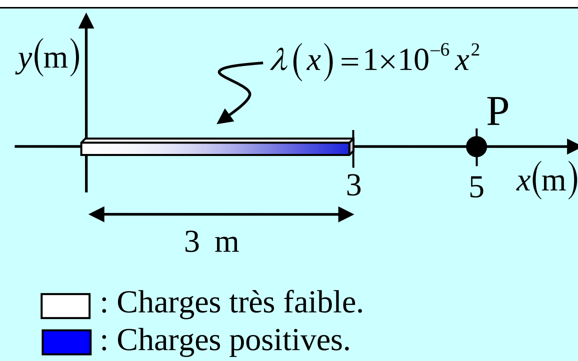
$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}Q(x, y, z)$$

(en coordonnée cartésienne)

ce qui influencera le champ électrique infinitésimale $\mathrm{d}\vec{E}$ généré par cette charge.

Situation A : *La mince tige le long de l'axe x.* Une tige mince placée le long de l'axe des *x*, de $x = 0$ à $x = 3$ m, porte une charge étendue dont la densité est donnée par l'expression $\lambda = 10^{-6}x^2$ C/m .

On désire **(a)** calculez la charge totale exacte portée par la tige, **(b)** écrivez l'intégrale qui donne le champ à $x = 5$ m et **(c)** résoudre l'intégrale et évaluer le champ électrique à $x = 5$ m.



Évaluons la charge totale de la tige à l'aide d'une intégrale le long de l'axe *x* entre $x = 0$ m et $x = 3$ m, car les charges sont situées entre ces deux coordonnées :

$$Q = \int \mathrm{d}Q \quad \Rightarrow \quad Q = \int_{x=0}^{3} \lambda(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\mathrm{d}Q = \lambda(x)\,\mathrm{d}x)$$

$$\Rightarrow \quad Q = \int_{x=0}^{3} 1\times10^{-6}x^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Remplacer } \lambda(x) = 1\times10^{-6}x^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad Q = 1\times10^{-6}\int_{x=0}^{3} x^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Factoriser la constante)}$$

$$\Rightarrow \quad Q = 1\times10^{-6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 \qquad \left(\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)$$

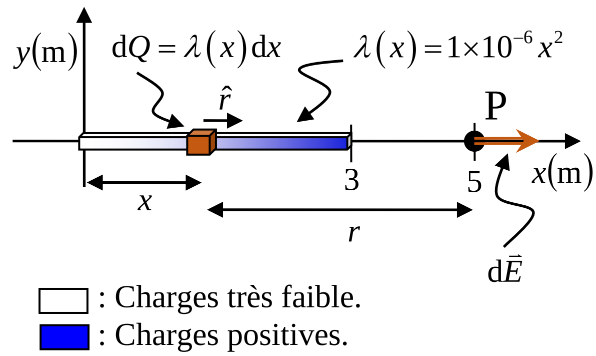
$$\Rightarrow \quad Q = 1\times10^{-6}\left(\frac{(3)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right) \qquad \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q = 9\times10^{-6}\ \mathrm{C}} \quad \textbf{(a)} \qquad \text{(Simplification)}$$

Posons l'intégrale afin d'évaluer le champ électrique $\vec{E}$ à la coordonnée $x = 5\ \mathrm{m}$:

<u>Expression des paramètres :</u>

- $\mathrm{d}Q = \lambda(x)\,\mathrm{d}x = 1\times10^{-6}\,x^2\mathrm{d}x$
- $r = 5 - x$
- $\hat{r} = \vec{i}$



$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \int k\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \int_{x=0}^{3} k\frac{\left(1\times10^{-6}\,x^2\mathrm{d}x\right)}{(5-x)^2}\left(\vec{i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = 1\times10^{-6}\,k\int_{x=0}^{3}\frac{x^2}{(5-x)^2}\,\mathrm{d}x\ \vec{i}} \quad \textbf{(b)}$$

Évaluons le champ électrique par le calcul de l'expression

$$\vec{E} = 1\times10^{-6}\,k\int_{x=0}^{3}\frac{x^2}{(5-x)^2}\,\mathrm{d}x\ \vec{i} \quad .$$

Pour ce faire, nous allons réaliser le changement de variable suivant :

$$u = 5 - x$$

Ce changement de variable proposera les changements suivant à notre intégrale :

Changement aux variables	Changement aux bornes de l'intégrale
• $u = 5 - x$, donc $x = 5 - u$. • $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$, donc $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$. • $x^2 = (5-u)^2 = 25 - 10u + u^2$	• $x \to 0$, donc $u = 5 - (0) = 5$ • $x \to 3$, donc $u = 5 - (3) = 2$

Remplaçons nos variables dans l’intégrale initiale afin d’évaluer le champ électrique en $x = 5\ \text{m}$:

$$\vec{E} = 1\times10^{-6}\,k\int_{x=0}^{3}\frac{x^2}{(5-x)^2}\,\mathrm{d}x\ \vec{i} \qquad \text{(Intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = 1\times10^{-6}\,k\int_{u=5}^{2}\frac{25-10u+u^2}{u^2}(-\,\mathrm{d}u)\ \vec{i} \qquad \text{(Changement de variable)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -1\times10^{-6}\,k\left[\int_{u=5}^{2}\frac{25}{u^2}\,\mathrm{d}u - \int_{u=5}^{2}\frac{10}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{u=5}^{2}\mathrm{d}u\right]\ \vec{i} \qquad \text{(Distribuer l’intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -1\times10^{-6}\,k\left(\left[\frac{-25}{u}\right]_5^2 - \left[10\ln|u|\right]_5^2 + \left[u\right]_5^2\right)\ \vec{i} \qquad \left(\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -1\times10^{-6}\,k\left(\left(\frac{-25}{2} - \frac{-25}{5}\right) - \left(10\ln(2) - 10\ln(5)\right) + (2-5)\right)\ \vec{i} \qquad \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -1\times10^{-6}\,k\left((-12{,}5+5) - (-9{,}16) + (-3)\right)\ \vec{i} \qquad \text{(Calcul)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -1\times10^{-6}\,k(-1{,}34)\ \vec{i} \qquad \text{(Simplificaiton)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = 1{,}21\times10^{4}\,\vec{i}\ \text{N/C}} \qquad \left(\text{Remplacer } k = 9\times10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}\right)$$