Chapitre 1.11 – Le théorème de Gauss

Le flux

Le flux est une grandeur scalaire correspondant à une grandeur physique évaluée sur une surface multipliée par la surface en question.

La ville de Toronto peut être considérée comme étant un flux immobilier.

Notation mathématique : $flux = \Phi$

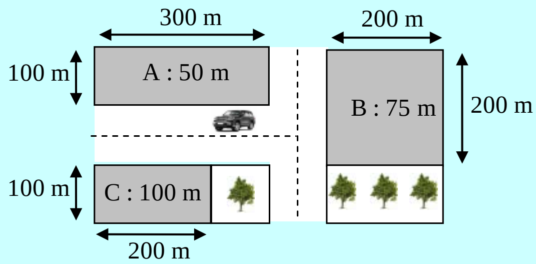
Unité (mètre) : $[\Phi] = \mathrm{X} \cdot \mathrm{m}^2$

où X : unité grandeur physique

<u>Exemple :</u> Flux immobilier

On peut évaluer le flux immobilier d'une ville en multipliant la hauteur des édifices (grandeur physique) en m par la surface qu'ils occupent au sol en m^2. Le flux immobilier aura comme unité le m^3.

Situation A : ***Le flux immobilier d'un cartier.*** Un cartier est constitué d'un édifice A d'une hauteur h_A de 50 m, d'un édifice B d'une hauteur h_B de 75 m et d'un édifice C d'une hauteur h_C de 100 m. La superficie des édifices est illustrée sur le schéma ci-contre. On désire évaluer le flux immobilier de ce cartier.



Évaluons le flux immobilier des édifices A, B et C. Puisque la hauteur des édifices est constante sur toute la surface, le flux sera uniquement le produit de la hauteur avec la surface :

$$\Phi_\mathrm{A} = h_\mathrm{A} A_\mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad \Phi_\mathrm{A} = (50)(100 \times 300)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_\mathrm{A} = 1{,}5 \times 10^6\ \mathrm{m}^3}$$

$$\Phi_\mathrm{B} = h_\mathrm{B} A_\mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad \Phi_\mathrm{B} = (75)(200 \times 200)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_\mathrm{B} = 3{,}0 \times 10^6\ \mathrm{m}^3}$$

$$\Phi_\mathrm{C} = h_\mathrm{C} A_\mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad \Phi_\mathrm{C} = (100)(100 \times 200)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_\mathrm{C} = 2{,}0 \times 10^6\ \mathrm{m}^3}$$

Le flux immobilier total du cartier sera la somme des flux évalués individuellement :

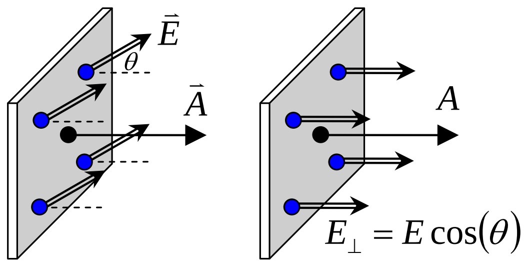
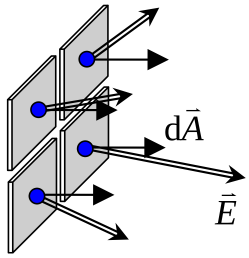
$$\Phi = \sum_i \Phi_i \quad \Rightarrow \quad \Phi = \Phi_\mathrm{A} + \Phi_\mathrm{B} + \Phi_\mathrm{C}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = (1{,}5 \times 10^6) + (3 \times 10^6) + (2 \times 10^6)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi = 6{,}5 \times 10^6\ \mathrm{m}^3}$$

Le flux électrique

Le flux électrique Φ_e est un scalaire correspondant au module du champ électrique perpendiculaire $E_\perp$ évalué sur une surface multiplié par l'aire A de la surface. Puisque le champ électrique $\vec{E}$ est vectoriel, il faut définir la surface $\vec{A}$ vectoriellement à l'aide d'une normale à la surface afin d'effectuer un produit scalaire transformant ainsi le produit du champ électrique $\vec{E}$ avec la surface $\vec{A}$ en scalaire :

Flux électrique Φ_e lorsque $\vec{E}$ est constant sur la surface plane $\vec{A}$	Flux électrique Φ_e lorsque $\vec{E}$ est arbitraire sur la surface
$\Phi_e = \vec{E}\cdot\vec{A} = \pm EA\cos(\theta)$	$\Phi_e = \iint \mathrm{d}\Phi_e = \iint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$
 Rappel : $\vec{E}\cdot\vec{A} = E_x A_x + E_y A_y + E_z A_z$	

où Φ_e : Le flux électrique ($\mathrm{N\cdot m^2/C}$)

$\mathrm{d}\Phi_e$: Flux électrique infinitésimal évalué sur une surface infinitésimal ($\mathrm{N\cdot m^2/C}$)

$\vec{E}$: Champ électrique évalué sur la surface $\vec{A}$ ou $\mathrm{d}\vec{A}$ (N/C)

$E_\perp$: Module du champ électrique perpendiculaire à la surface $\vec{A}$ (N/C) $\quad (E_\perp = E\cos(\theta))$

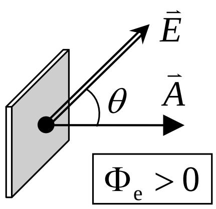
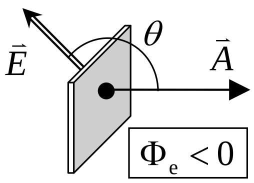
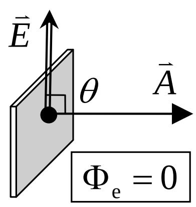
$\vec{A}$: Surface sur laquelle le flux électrique est évalué ($\mathrm{m^2}$)

A : Aire de la surface sur laquelle le flux électrique est évalué ($\mathrm{m^2}$)

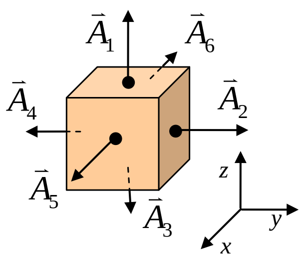
$\mathrm{d}\vec{A}$: Élément de surface infinitésimal sur laquelle on évalue le flux électrique ($\mathrm{m^2}$)

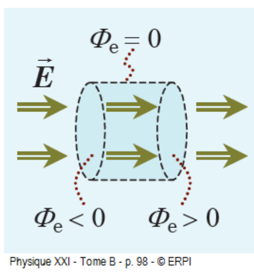
θ : Angle entre le champ électrique $\vec{E}$ et le vecteur surface $\vec{A}$

Conventions :

Flux électrique positif	**Fux électrique négatif**	**Flux électrique nul**
$\Phi_e = \vec{E}\cdot\vec{A} > 0 \quad\Rightarrow\quad \theta < 90°$	$\Phi_e = \vec{E}\cdot\vec{A} < 0 \quad\Rightarrow\quad \theta > 90°$	$\Phi_e = \vec{E}\cdot\vec{A} = 0 \quad\Rightarrow\quad \theta = 90°$
		

Lorsqu'une surface est fermée (forme un volume fermé), l'orientation du vecteur surface $\vec{A}$ point toujours vers l'extérieur du volume formé par la surface.



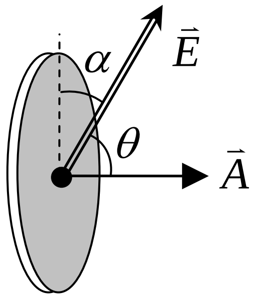


Situation 1 : *Le flux électrique dans un champ électrique uniforme.* Un cerceau circulaire en plastique de 50 cm de rayon est placé dans un champ électrique uniforme de 800 N/C. Le plan du cerceau fait un angle α de 30° avec l'orientation du champ électrique. On désire calculer la valeur absolue du flux électrique qui traverse le cerceau.

Évaluons la surface totale du cerceau :

$$A = \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad A = \pi (0{,}50)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0{,}7854 \ \text{m}^2}$$

Représentons la situation :



- $\vec{E}$: Champ électrique uniforme ($\left|\vec{E}\right| = 800 \ \text{N/C}$)
- $\vec{A}$: Surface du cerceau ($\left|\vec{A}\right| = 0{,}7854 \ \text{m}^2$)
- α : Angle entre $\vec{E}$ et le plan du cerceau ($\alpha = 30°$)
- θ : Angle entre $\vec{E}$ et la normale du cerceau $\vec{A}$

Évaluons le flux électrique à partir de l'expression avec champ électrique constant :

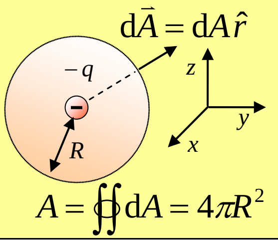
$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \Phi_e = \left|\vec{E}\right|\left|\vec{A}\right|\cos(\theta) \qquad \text{(Produit scalaire : } \vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos(\theta)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_e = \left|\vec{E}\right|\left|\vec{A}\right|\cos(90° - \alpha) \qquad \text{(Remplacer } \theta = 90° - \alpha \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_e = (800)(0{,}7854)\cos(90° - (30°)) \qquad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_e = 314 \ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}} \qquad \text{(Évaluer } \Phi_e \text{)}$$

Situation 2 : *Le flux à travers une sphère entourant une bille chargée.* Une petite bille porte une charge $q = -8\,\mu\text{C}$. On désire évaluer le flux électrique à travers une surface sphérique de rayon R centré sur la bille, pour **(a)** $R = 2 \ \text{m}$ et **(b)** $R = 4 \ \text{m}$.



Puisque le champ électrique n'est pas constant, évaluons le flux électrique à partir de l'intégrale

$$\Phi_e = \iint \mathrm{d}\Phi_e \quad \Rightarrow \quad \Phi_e = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_e = \iint \left(k\frac{Q}{r^2}\hat{r}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \text{(Charge ponctuelle : } \vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_e = \iint k\frac{Q}{(R)^2}\hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \text{(Distance } r \text{ constante : } r = R\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_e = k\frac{Q}{R^2}\iint \hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \text{(Factoriser constante)}$$

Remplaçons le vecteur surface infinitésimal $\mathrm{d}\vec{A}$ par une expression séparant l'orientation et le module :

$$\Phi_{\mathrm{e}} = k\frac{Q}{R^2}\iint \hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\mathrm{e}} = k\frac{Q}{R^2}\iint \hat{r}\cdot\left(\mathrm{d}A\,\hat{r}\right) \qquad \text{(Orientation surface radiale : } \mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}A\,\hat{r}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{\mathrm{e}} = k\frac{Q}{R^2}\iint \mathrm{d}A \qquad \text{(Produit scalaire : } \hat{r}\cdot\hat{r} = 1\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{\mathrm{e}} = k\frac{Q}{R^2}\left(4\pi R^2\right) \qquad \text{(Aire d'une sphère : } A = 4\pi R^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{\mathrm{e}} = 4\pi kQ \qquad \text{(Simplifier } R^2\text{)}$$

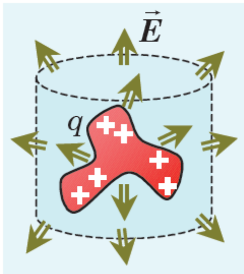
$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_{\mathrm{e}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \qquad \text{(Remplacer } \varepsilon_0 = 1/4\pi k\text{)}$$

On réalise que le flux électrique qui traverse la sphère en question dépend uniquement de la charge à l'intérieur de la sphère et ne dépend en aucun cas de la taille de la sphère. Ainsi, nous pouvons répondre à la question **(a)** et **(b)** simultanément :

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\mathrm{e}} = \frac{\left(-8\times 10^{-6}\right)}{\left(8{,}85\times 10^{-12}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_{\mathrm{e}} = -9{,}05\times 10^{5}\ \mathrm{N\cdot m^2/C}} \qquad \textbf{(a) et (b)}$$

Le théorème de Gauss



Physique XXI - Tome B - p. 100 - © ERPI

Le théorème de Gauss permet d'affirmer que le flux électrique mesuré sur une surface fermée quelconque est proportionnel à la charge électrique se trouvant à l'intérieur de la surface en question. Ce théorème est une réécriture permettant d'illustrer qu'une charge électrostatique génère un champ électrique coulombien et qu'une distribution de charges génère un champ électrique total respectant le principe de superposition vectoriel :

$$\Phi_{\mathrm{e(sf)}} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$$

où $\Phi_{\mathrm{e(sf)}}$: Flux électrique totale sur la surface fermée ($\mathrm{N\cdot m^2/C}$)

Q_{int} : Charge électrique à l'intérieur de la surface fermée (C)

ε_0 : Constante électrique, $\varepsilon_0 = 8{,}85\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$ ($\varepsilon_0 = 1/4\pi k$)

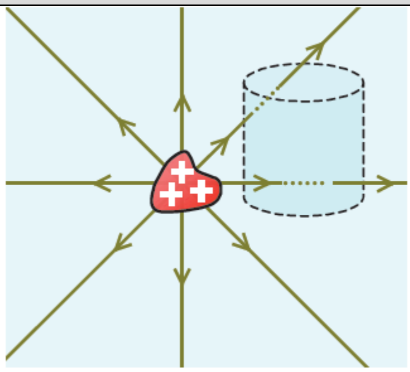
Afin d'illustrer que le calcul du flux électrique s'effectue sur une surface fermée, on utilise la notation d'une intégrale double avec un cercle (ce qui ferme le parcours d'intégration) :

$$\Phi_{\mathrm{e(sf)}} = \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

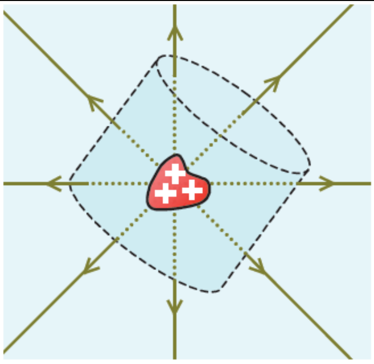
<u>Preuve :</u> (en construction)

Le champ électrique généré par une charge ponctuelle est de la forme :

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

<table>
<tr><th>Charges à l’extérieur de la surface de Gauss</th><th>Charges à l’intérieur de la surface de Gauss</th></tr>
<tr><td>

Physique XXI - Tome B - p. 101 - © ERPI

Le flux électrique entrant nécessite peu de surface avec un champ électrique fort.
Le flux électrique sortant nécessite beaucoup de surface avec un champ électrique faible.
Puisque l’augmentation de la surface s’effectue au rythme où le module du champ électrique diminue, la somme des flux est nulle et nous avons :

$$\Phi_{\mathrm{e(sf)}} = 0 \quad \text{car} \quad Q_{\mathrm{int}} = 0$$
</td><td>

Physique XXI - Tome B - p. 101 - © ERPI

Le flux électrique mesuré sur une petite surface de Gauss nécessite peu de surface avec un champ électrique fort.
Le flux électrique mesuré sur une grande surface de Gauss nécessite beaucoup de surface avec un champ électrique faible.
Puisque l’augmentation de la surface s’effectue au rythme où le module du champ électrique diminue, le flux total ne dépend pas de la surface, car l’ensemble des lignes de champ sont toujours captées :

$$\Phi_{\mathrm{e(sf)}} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$$
</td></tr>
</table>

Situation A : ***La charge mystère.*** Une charge mystère a été introduite à l’intérieur d’un cube de 2 mètres de côté. Le flux électrique a été évalué sur les six faces du cube : $\Phi_1 = 10\ \mathrm{Nm^2/C}$, $\Phi_2 = 5\ \mathrm{Nm^2/C}$, $\Phi_3 = -30\ \mathrm{Nm^2/C}$, $\Phi_4 = -10\ \mathrm{Nm^2/C}$, $\Phi_5 = 10\ \mathrm{Nm^2/C}$, $\Phi_6 = 0\ \mathrm{Nm^2/C}$. On désire évaluer la charge totale à l’intérieur du cube.

Évaluons le flux électrique total sur la surface fermée du cube :

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{6}\Phi_i = (10)+(5)+(-30)+(-10)+(10)+(0) = -15\ \mathrm{Nm^2/C}$$

Avec le théorème de Gauss, on peut évaluer la charge à l’intérieur :

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad Q_{\mathrm{int}} = \Phi\,\varepsilon_0 = (-15)(8{,}85\times10^{-12})$$

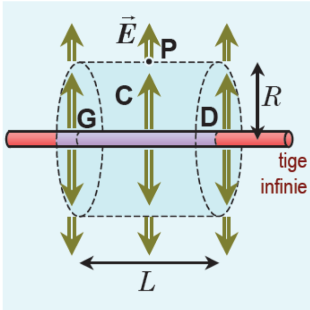
$$\Rightarrow \quad \boxed{Q_{\mathrm{int}} = -1{,}33\times10^{-10}\,\mathrm{C}}$$

Situation 3 : ***Le champ électrique d'une TRIUC.*** On désire démontrer, à l'aide du théorème de Gauss, que le module du champ électrique à une distance R d'une TRIUC portant une densité linéique de charge λ est

$$E = \frac{2k|\lambda|}{R}$$

Considérons une surface de Gauss fermée autour de notre tige de forme cylindrique touchant au point P situé à une distance R de la tige. On constante trois sections de surface :

disque gauche **G**, disque droite **D** et un cylindre **C**



Les deux disques étant parallèle au champ électrique généré par la tige possède un flux électrique nul :

$$\Phi_{e(\text{Disque})} = \iint \mathrm{d}\Phi_e = \iint E\,\mathrm{d}A\cos(90°) = 0$$

Évaluons le flux électrique sur la surface d'un cylindre de rayon R et de hauteur L centré sur la tige infini :

$\Phi_e = \iint \mathrm{d}\Phi_e \quad \Rightarrow \quad \Phi_e = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

$\Rightarrow \quad \Phi_e = \iint (E\,\hat{r})\cdot \mathrm{d}\vec{A}$ (Champ radial cylindrique : $\vec{E} = E\,\hat{r}$)

$\Rightarrow \quad \Phi_e = \iint (E\,\hat{r})\cdot \mathrm{d}A\,\hat{r}$ (Surface radiale cylindrique : $\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}A\,\hat{r}$)

$\Rightarrow \quad \Phi_e = \iint E\,\mathrm{d}A$ (Produit scalaire : $\hat{r}\cdot\hat{r} = 1$)

$\Rightarrow \quad \Phi_e = E\iint \mathrm{d}A$ (Module du champ E constant sur la surface)

$\Rightarrow \quad \Phi_e = E(2\pi\,RL)$ (Surface cylindre : $A = 2\pi\,RL$)

$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_e = 2\pi\,RLE}$

Évaluons la charge à l'intérieur du cylindre de hauteur H :

$$Q_{\text{int}} = \lambda\,L$$

Appliquons le théorème de Gauss afin d'évaluer le champ électrique à une distance R de la tige :

$\Phi_{e(\text{sf})} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad (2\pi\,RLE) = \dfrac{(\lambda L)}{\varepsilon_0}$ (Remplacer $\Phi_{e(\text{sf})}$ et Q_{int})

$\Rightarrow \quad E = \dfrac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0 R}$ (Isoler E)

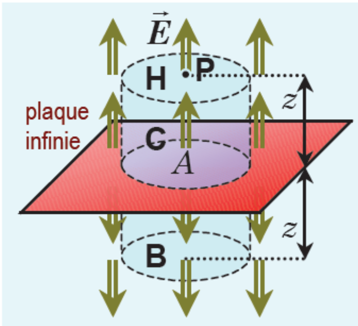
$\Rightarrow \quad \boxed{E = \dfrac{2k\lambda}{R}}$ (Remplacer $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi\,k}$)

Situation 4 : ***Le champ électrique d'une PPIUC.*** On désire démontrer, à l'aide du théorème de Gauss, que le module du champ électrique généré par une PPIUC portant une densité surfacique de charge σ est

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$$

Considérons une surface de Gauss fermée autour de notre plaque de forme cylindrique de rayon *R* touchant au point *P* situé à une distance *z* de notre plaque. On constante trois sections de surface :

disque du haut **H**, disque du bas **B** et un cylindre **C**



Physique XXI - Tome B - p. 103 - © ERPI

Le cylindre étant parallèle au champ électrique généré par la plaque possède un flux électrique nul :

$$\Phi_{\text{e(Cylindre)}} = \iint \mathrm{d}\Phi_{\text{e}} = \iint E\,\mathrm{d}A\cos(90°) = 0$$

Évaluons le flux électrique sur la surface du disque du haut :

$\Phi_{\text{e}} = \iint \mathrm{d}\Phi_{\text{e}} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\text{e}} = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

$\Rightarrow \quad \Phi_{\text{e}} = \iint \left(E\,\vec{k}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{A}$ (Champ perpendiculaire plaque : $\vec{E} = E\,\vec{k}$)

$\Rightarrow \quad \Phi_{\text{e}} = \iint \left(E\,\vec{k}\right)\cdot \mathrm{d}A\,\vec{k}$ (Surface plane : $\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}A\,\vec{k}$)

$\Rightarrow \quad \Phi_{\text{e}} = \iint E\,\mathrm{d}A$ (Produit scalaire : $\vec{k}\cdot\vec{k} = 1$)

$\Rightarrow \quad \Phi_{\text{e}} = E\iint \mathrm{d}A$ (Module du champ *E* constant sur la surface)

$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_{\text{e}} = E\pi R^2}$ (Surface disque : $A = \pi R^2$)

Puisque le flux électrique sur le disque du bas est identique au flux électrique du disque du haut par symétrie, nous avons le flux électrique total suivant sur la surface fermée :

$$\Phi_{\text{e(sf)}} = 2\Phi_{\text{e}} = 2E\pi R^2$$

Évaluons la charge à l'intérieur du cylindre de rayon *R* :

$$Q_{\text{int}} = \sigma A \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{int}} = \sigma \pi R^2$$

Appliquons le théorème de Gauss afin d'évaluer le champ électrique généré par la plaque :

$\Phi_{\text{e(sf)}} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \left(2E\pi R^2\right) = \dfrac{\left(\sigma\pi R^2\right)}{\varepsilon_0}$ (Remplacer $\Phi_{\text{e(sf)}}$ et Q_{int})

$\Rightarrow \quad \boxed{E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$ (Isoler *E*)

Exercices

1.11.10 Le champ électrique à l'extérieur et à l'intérieur d'une sphère isolante uniformément chargée. Une sphère isolante de rayon R porte une densité volumique de charge uniforme ρ. Déterminez le module du champ électrique à une distance r du centre de la sphère pour **(a)** $r > R$; **(b)** $r < R$. **(c)** Quel est le module du champ à la surface de la sphère ($r = R$) ? Doit-on utiliser l'équation obtenue en **(a)** ou **(b)** pour le calculer ?

1.11.11 Le champ électrique à l'extérieur et à l'intérieur d'une plaque isolante uniformément chargée. Une grande plaque plane d'épaisseur e porte une densité volumique de charge uniforme ρ. Déterminez le module du champ électrique en un point situé à une distance d du milieu de la plaque (schéma ci-contre) pour **(a)** $d < e/2$ (point situé à l'extérieur de la plaque); **(b)** $d < e/2$ (point situé à l'intérieur de la plaque). **(c)** Quel est le module du champ à la surface de la plaque ($d = e/2$) ? Doit-on utiliser l'équation obtenue en **(a)** ou **(b)** pour le calculer ?

Solutions

$\boxed{1.11.10}$ Le champ électrique à l'extérieur et à l'intérieur d'une sphère isolante uniformément chargée.

a) $r > R$

$$\Phi_{E(\text{sf})} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \oiint_{\text{sf}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Surface de Gauss : Sphère)}$$

$$\Rightarrow \quad E \oiint_{\text{sf}} \mathrm{d}A = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad (\vec{E} \,//\, \mathrm{d}\vec{A}\, ,\, E \text{ uniforme sur la surface de Gauss})$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi r^2 E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Surface de Gauss : sphère de rayon } r\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho V) \qquad (Q_{\text{int}} = \rho V)$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right) \qquad \text{(Volume de charge : sphère de rayon } R\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}}$$

<u>Remarque :</u>

Avec $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ et $Q_{\text{int}} = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$, nous retrouvons l'expression $E = \frac{kQ_{\text{int}}}{r^2}$ à l'extérieur de la sphère.

b) $r < R$

$$\Phi_{E(\text{sf})} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \oiint_{\text{sf}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Surface de Gauss : Sphère)}$$

$$\Rightarrow \quad E \oiint_{\text{sf}} \mathrm{d}A = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad (\vec{E} \,//\, \mathrm{d}\vec{A}\, ,\, E \text{ uniforme sur la surface de Gauss})$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi r^2 E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Surface de Gauss : sphère de rayon } r\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho V) \qquad (Q_{\text{int}} = \rho V)$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right) \qquad \text{(Volume de charge : sphère de rayon } r\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r}$$

c) Soit $r = R$, alors nous pouvons prendre la solution de (a) ou (b) ce qui donne

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R \quad .$$

1.11.11 Le champ électrique à l'extérieur et à l'intérieur d'une plaque isolante uniformément chargée.

a) $d > e/2$

$$\Phi_{E(sf)} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \oiint_{sf} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{(Surface de Gauss : Prise rectangulaire)}$$

$$\Rightarrow \quad 2EA + 0 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{(Deux extrémités du prisme } \vec{E} \,//\, d\vec{A}\text{, côté } \vec{E} \perp d\vec{A}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad 2EA = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho V \quad (Q_{int} = \rho V)$$

$$\Rightarrow \quad 2EA = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\left(2\frac{e}{2}A\right) \quad \text{(Volume de charge : Prise de hauteur } 2\frac{e}{2} \text{ et surface } A\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}e}$$

Remarque :

Avec $\sigma = \rho e$, nous retrouvons une définition de densité surfacique de charge afin de retrouver l'expression $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ à l'extérieur de la plaque.

b) $d < e/2$

$$\Phi_{E(sf)} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \oiint_{sf} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{(Surface de Gauss : Prise rectangulaire)}$$

$$\Rightarrow \quad 2EA + 0 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{(Deux extrémités du prisme } \vec{E} \,//\, d\vec{A}\text{, côté } \vec{E} \perp d\vec{A}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad 2EA = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho V \quad (Q_{int} = \rho V)$$

$$\Rightarrow \quad 2EA = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(2dA) \quad \text{(Volume de charge : Prise de hauteur } 2d \text{ et surface } A\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}d}$$

c) Soit $d = \frac{e}{2}$, alors nous pouvons prendre la solution de (a) ou (b) ce qui donne

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}e \quad .$$