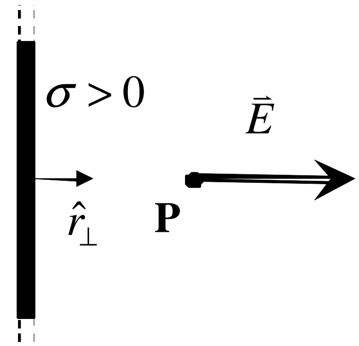
# Chapitre 1.10 – Le champ électrique d'une plaque par intégration

## Le champ électrique généré par une plaque plane infinie uniformément chargée

Le champ électrique $\vec{E}$ généré par une plaque plane infinie uniformément chargée (PPIUC) en un point **P** de l'espace est proportionnel à la densité surfacique de charges $\sigma$ sur la plaque et ne dépend par de la distance entre la plaque et le point **P** où le champ électrique est évalué :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{r}_\perp$$




où $\vec{E}$ : Champ électrique généré au point **P** (N/C)

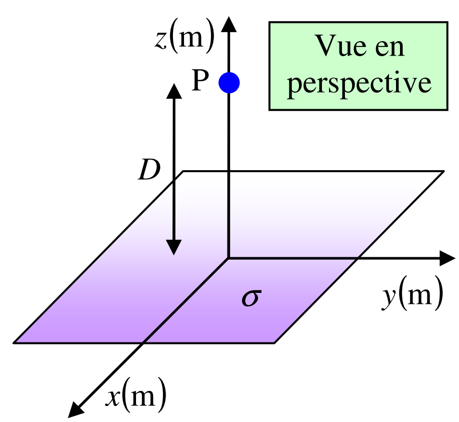
$\sigma$ : Densité surfacique de charge (C/m$^2$) $\quad (\sigma = Q/A)$

$\varepsilon_0$ : Constante électrique, $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2}$

$\hat{r}_\perp$ : Vecteur unitaire orientation perpendiculaire à la plaque

Preuve :

Considérons une plaque uniformément chargée de densité de charge $\sigma$ dont le centre de celle-ci est situé à une distance $D$ d'un point **P** où nous pouvons évaluer le champ électrique $\vec{E}$. La distance $D$ est perpendiculaire à la plaque et cette distance est suffisamment petite pour considérer la plaque comme étant infinie (approximation de la plaque infinie).




Pour simplifier le calcul sans perdre toute généralité, centrons la plaque à l'origine d'un système d'axe $xyz$, alignons la plaque dans le plan $xy$ et situons le point **P** sur l'axe $z$.

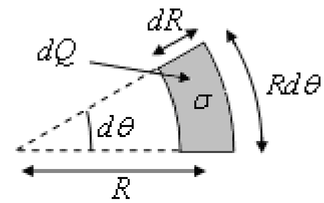
Introduisons un nouveau système d'axe $R\theta z$ en coordonnée cylindrique dont :

- $R$ : Distance radiale par rapport à l'origine du système d'axe $xy$ ($R \in [0\,..\,\infty]$)
- $\theta$ : Angle dans le plan $xy$ par rapport à l'axe $x$ ($\theta \in [0\,..\,2\pi]$)
- $z$ : Hauteur verticale par rapport au plan $xy$ ($z \in [-\infty\,..\,\infty]$)

Puisque nous allons utiliser le principe de superposition pour évaluer le champ électrique total au point **P**, nous allons définir un élément infinitésimal de charge $\mathrm{d}Q$ en **coordonnée cylindrique**[1] :

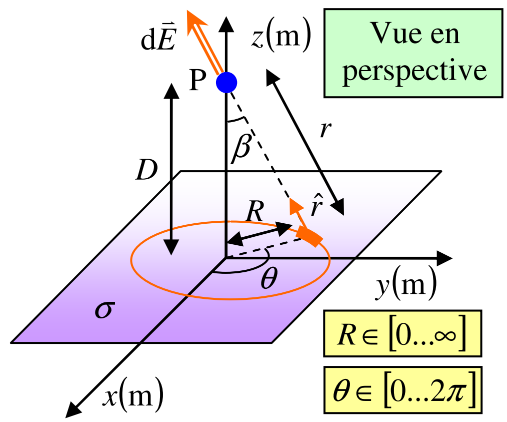
$$Q = \sigma A \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}Q = \sigma\,\mathrm{d}A$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\mathrm{d}Q = \sigma\, R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta}$$



Élément infinitésimal de charge électrique $\mathrm{d}Q$ sur une surface cylindrique.

Découpons notre plaque en morceau infinitésimal de surface $\mathrm{d}A$ et représentons le champ électrique infinitésimal $\mathrm{d}\vec{E}$ généré par cette charge infinitésimale $\mathrm{d}Q$ à l'aide de notre système d'axe :




<u>Champ électrique infinitésimal :</u>

$$\mathrm{d}\vec{E} = k\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}$$

et $\qquad \mathrm{d}Q = \sigma\, R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta$

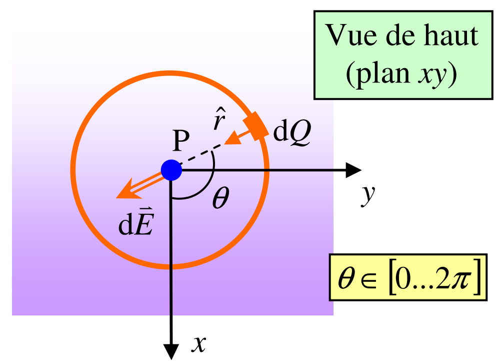
$$\hat{r} = -\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j} + \cos(\beta)\vec{k}$$

Par une relation de triangle rectangle, nous obtenons :

$$r = \sqrt{R^2 + D^2}$$

On peut utiliser la définition de la fonction cosinus pour obtenir :

$$\cos(\beta) = \frac{D}{r}$$




Évaluons à l'aide d'une sommation continue de champs électriques infinitésimaux $\mathrm{d}\vec{E}$ le champ électrique total au point **P** :

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} \qquad \text{(Principe de superposition)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \int k\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r} \qquad \text{(Définition champ infinitésimal)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \int_{R=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} k\,\frac{\sigma\, R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta}{r^2}\hat{r} \qquad (\text{Remplacer } \mathrm{d}Q = \sigma\, R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = k\sigma\int_{R=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta}{r^2}\hat{r} \qquad \text{(Factoriser constantes)}$$

[1] Relation entre coordonnées cartésiennes et cylindriques : $x = R\cos(\theta)$, $y = R\sin(\theta)$, $z = z$

Remplaçons l'expression de $\hat{r}$ dans notre intégrale et séparons les composantes de notre vecteur résultant en effectuant trois intégrales séparées :

$$\vec{E} = k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta}{r^2}\hat{r} \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta}{r^2}\left(-\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j} + \cos(\beta)\vec{k}\right) \qquad (\hat{r} = -\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j} + \cos(\beta)\vec{k})$$

$$\vec{E} = -k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R\cos(\theta)}{r^2}\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta\,\vec{i}$$
$$\Rightarrow \quad -k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R\sin(\theta)}{r^2}\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta\,\vec{j} \qquad \text{(Distribuer l'intégrale, } \cos(\beta) = \frac{D}{r}\text{)}$$
$$+k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R\,D}{r^3}\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{E} = -k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{R^2 + D^2}\,\mathrm{d}R \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta\,\vec{i}$$
$$\Rightarrow \quad -k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{R^2 + D^2}\,\mathrm{d}R \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\,\vec{j} \qquad (r = \sqrt{R^2 + D^2}\text{ , factoriser } R \text{ et } D)$$
$$+k\sigma D \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{\left(R^2 + D^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}R \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta\,\vec{k}$$

Le champ électrique $\vec{E}$ sera le résultat de trois intégrales pour les trois orientations *xyz*. Évaluons en premier lieu les résultats sur l'axe $x$ et $y$ et constatons que le champ électrique dans ces deux orientations est toujours nul ( $E_x = E_y = 0$ ) :

<u>Selon l'axe *x* :</u>

$$E_x = -k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{R^2 + D^2}\mathrm{d}R \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad E_x = -k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{R^2 + D^2}\mathrm{d}R\left[\sin(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \qquad \left(\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C\right)$$

$$\Rightarrow \quad E_x = -k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{R^2 + D^2}\mathrm{d}R\left(\sin(2\pi) - \sin(0)\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad E_x = -k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{R^2 + D^2}\mathrm{d}R\ (0) \qquad (\sin(2\pi) = \sin(0) = 0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_x = 0} \qquad \text{(Simplifier)}$$

Selon l'axe *y* :

$$E_y = -k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{R^2 + D^2}\,\mathrm{d}R \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad E_y = -k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{R^2 + D^2}\,\mathrm{d}R\left[-\cos(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \qquad \left(\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C\right)$$

$$\Rightarrow \quad E_y = -k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{R^2 + D^2}\,\mathrm{d}R\left(-\cos(2\pi) - -\cos(0)\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad E_y = -k\sigma \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{R^2 + D^2}\,\mathrm{d}R(0) \qquad \left(\cos(2\pi) = \cos(0) = 1\,, -1 - -1 = 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_y = 0} \qquad \text{(Simplifier)}$$

Évaluons maintenant le champ électrique selon l'axe *z* :

$$E_z = k\sigma D \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{\left(R^2 + D^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}R \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = k\sigma D \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{\left(R^2 + D^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}R\left[\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \qquad \left(\int \mathrm{d}x = x + C\right)$$

$$\Rightarrow \quad E_z = k\sigma D \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{\left(R^2 + D^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}R\left(2\pi\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = 2\pi\, k\sigma D \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{\left(R^2 + D^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}R \qquad \text{(Factoriser } 2\pi\text{)}$$

Pour résoudre l'intégrale, posons le changement de variable suivant :

$$u = R^2 + D^2 \qquad \text{ainsi} \qquad \mathrm{d}u = 2R\,\mathrm{d}R$$

Changeons également les bornes de l'intégrale pour passer de $\phi$ à $u$ :

- $R = 0 \quad \rightarrow \quad u = (0)^2 + D^2 \quad \Rightarrow \quad u = D^2$ (Borne inférieure)
- $R = \infty \quad \rightarrow \quad u = (\infty)^2 + D^2 \quad \Rightarrow \quad u = \infty$ (Borne supérieure)

Ce qui nous donne :

$$E_z = 2\pi k\sigma D \int_{R=0}^{\infty} \frac{R}{\left(R^2 + D^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}R$$ (Équation précédente)

$$\Rightarrow \quad E_z = 2\pi k\sigma D \int_{u=D^2}^{\infty} \frac{1}{u^{3/2}} \left(\frac{\mathrm{d}u}{2}\right)$$ (Remplacer $\frac{\mathrm{d}u}{2} = R\,\mathrm{d}R$

$$\Rightarrow \quad E_z = \pi k\sigma D \int_{u=D^2}^{\infty} u^{-3/2}\,\mathrm{d}u$$ (Factoriser ½, réécriture)

$$\Rightarrow \quad E_z = \pi k\sigma D \left[\frac{u^{-1/2}}{-1/2}\right]_{u=D^2}^{u=\infty}$$ ( $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ )

$$\Rightarrow \quad E_z = -2\pi k\sigma D \left[u^{-1/2}\right]_{u=D^2}^{u=\infty}$$ (Factoriser terme -½ )

$$\Rightarrow \quad E_z = -2\pi k\sigma D \left((\infty)^{-1/2} - \left(D^2\right)^{-1/2}\right)$$ (Évaluer l'intégrale)

$$\Rightarrow \quad E_z = -2\pi k\sigma D \left(0 - \frac{1}{D}\right)$$ (Simplifier)

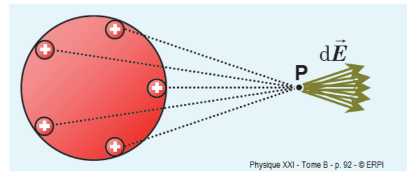
$$\Rightarrow \quad E_z = 2\pi k\sigma$$ (Simplifier)

$$\Rightarrow \quad E_z = 2\pi \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\sigma$$ (Remplacer $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ )

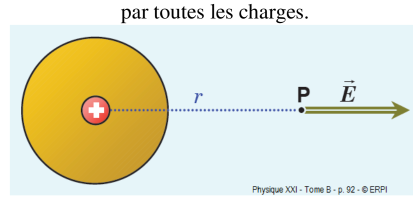
$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \blacksquare$$ (Simplifier)

# Le champ électrique généré par une coquille sphérique uniformément chargée

Le champ électrique $\vec{E}$ généré par une coquille sphérique uniformément chargée de charge totale $Q$ diminue en fonction du carré de la distance $r$ à l'extérieur de la coquille et est nul à l'intérieur de la coquille. Il est équivalent au champ électrique généré par une charge ponctuelle unique $Q$ située au centre de la sphère :



Le champ électrique total au point P correspond à la superposition linéaire des champs générés par toutes les charges.



Le champ électrique au point P est équivalent à celui généré par une seule particule regroupant l'ensemble de la charge au centre de la sphère.

| À l'extérieur de la sphère : | À l'intérieur de la sphère : |
|---|---|
| $(r > R)$ | $(r < R)$ |
| $\vec{E} = k\dfrac{Q}{r^2}\hat{r}$ | $\vec{E} = 0$ |

où $\vec{E}$ : Champ électrique généré au point **P** (N/C)

$Q$ : Charge totale sur la sphère (C)

$r$ : Distance entre le centre de la sphère et le point **P** (m)

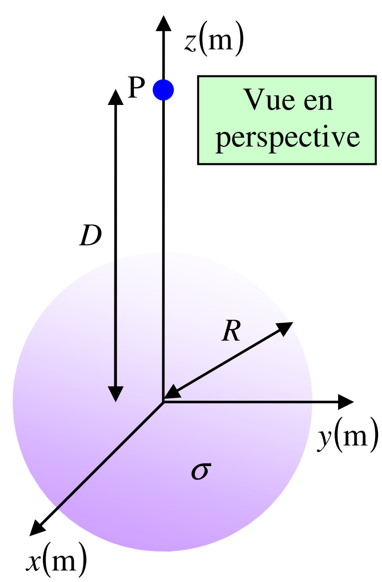
$\hat{r}$ : Vecteur unitaire orientation de $Q$ (source) vers le point **P** (cible)

$R$ : Rayon de la sphère (m)

$k$ : Constante de la loi de Coulomb, $k = 9{,}00\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$

Preuve :

Considérons une coquille sphérique uniformément chargée de charge totale $Q$ dont le centre est situé à une distance $D$ d'un point **P** où nous pouvons évaluer le champ électrique $\vec{E}$. Pour simplifier le calcul sans perdre toute généralité, centrons la coquille à l'origine d'un système d'axe $xyz$ et situons le point **P** sur l'axe $z$.




La sphère étant de rayon $R$, nous pouvons établir le lien suivant entre la densité de charge surfacique $\sigma$ de la sphère et sa charge totale $Q$ :

$$Q = \sigma A \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 4\pi R^2 \sigma}$$

(Remplacer $A = 4\pi R^2$)

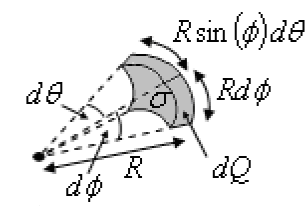
Introduisons un nouveau système d'axe $R\theta\phi$ en coordonnée sphérique dont

- $R$ : Distance radial par rapport à l'origine du système d'axe $xyz$ ( $R \in [0 .. \infty]$ )
- $\theta$ : Angle dans le plan $xy$ par rapport à l'axe $x$ ( $\theta \in [0 .. 2\pi]$ )
- $\phi$ : Angle par rapport à l'axe $z$ ( $\phi \in [0 .. \pi]$ )

Puisque nous allons utiliser le principe de superposition pour évaluer le champ électrique total au point **P**, nous allons définir un élément infinitésimal de charge d$Q$ en **coordonnée sphérique**[2] :

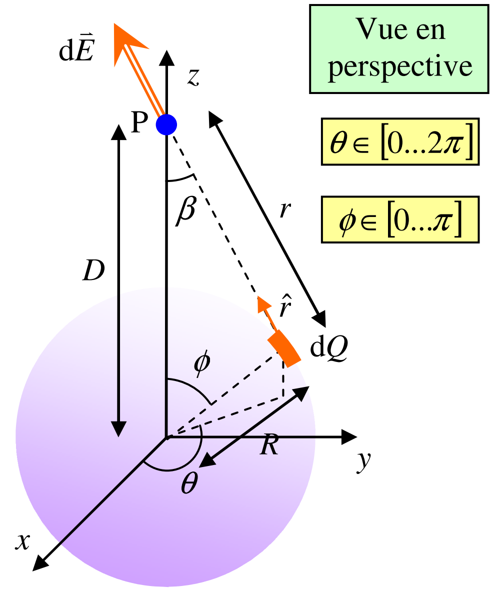
$$Q = \sigma A \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}Q = \sigma \,\mathrm{d}A$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}Q = \sigma R^2 \sin(\phi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}$$



Élément infinitésimal de charge électrique d$Q$ sur une surface sphérique.

Découpons notre coquille en morceau infinitésimal de surface d$A$ et représentons le champ électrique infinitésimal d$\vec{E}$ généré par cette charge infinitésimale d$Q$ à l'aide de notre système d'axe :




Champ électrique infinitésimal :

$$\mathrm{d}\vec{E} = k\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}$$

Puisque la géométrique qui relie le triangle formé des côtés $R$, $r$ et $D$ n'est pas un triangle rectangle, nous devons nécessairement utiliser la **loi des cosinus** pour relier ces grandeurs :

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos(\theta)$$

Nous pouvons appliquer la loi des cosinus pour évaluer la distance $r$ entre chaque élément d$Q$ et le point **P** en fonction de l'angle $\phi$ :

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad r^2 = D^2 + R^2 - 2DR\cos(\phi) \qquad \text{(Remplacer)}$$

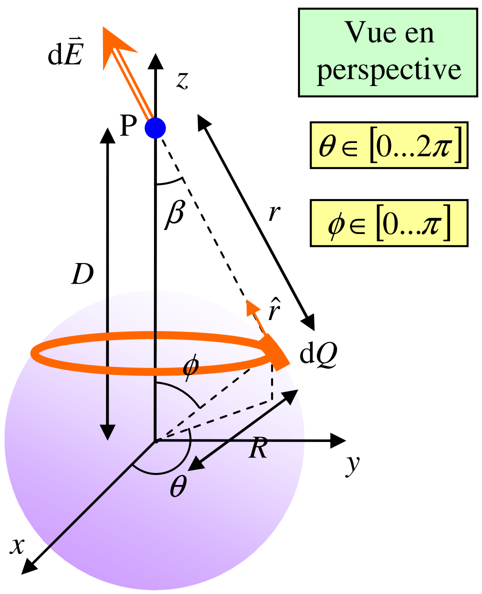
$$\Rightarrow \quad \boxed{r = \sqrt{D^2 + R^2 - 2DR\cos(\phi)}} \qquad \text{(Isoler } r\text{)}$$

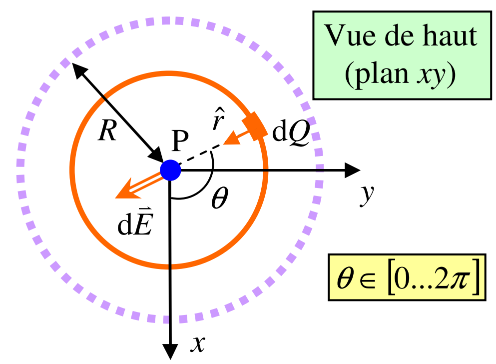
La principale difficulté réside dans l'expression du vecteur unitaire $\hat{r}$ qui doit être décomposé dans le système d'axe $xyz$. En se fiant au dessin en perspective (voir ci-haut), on peut réalise que :

$$\hat{r} = -\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j} + \cos(\beta)\vec{k}$$

[2] Relation entre coordonnées cartésiennes et sphériques : $x = R\cos(\theta)\sin(\phi)$, $y = R\sin(\theta)\sin(\phi)$, $z = R\cos(\phi)$

Pour mieux visualiser la décomposition dans le plan $xy$ du vecteur $\hat{r}$, on peut réaliser que tous les éléments d$Q$ pouvant être localisé pour un angle unique $\phi$ forme un anneau ayant tous une distance $r$ identique. L'anneau de charges vue de haut permet de mieux comprendre le rôle de $\theta$ dans la décomposition du vecteur $\hat{r}$. Le rôle de l'angle $\phi$ sera d'itérer sur l'ensemble des anneaux de charges :




Vue de haut, le point **P** est situé à l'origine du système d'axe $xy$.

Rappel :

$$\hat{r} = -\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j} + \cos(\beta)\vec{k}$$

On peut à nouveau appliquer la loi des cosinus pour exprimer l'angle $\beta$ en fonction de la distance $r$ :

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad R^2 = D^2 + r^2 - 2Dr\cos(\beta) \qquad \text{(Remplacer)}$$

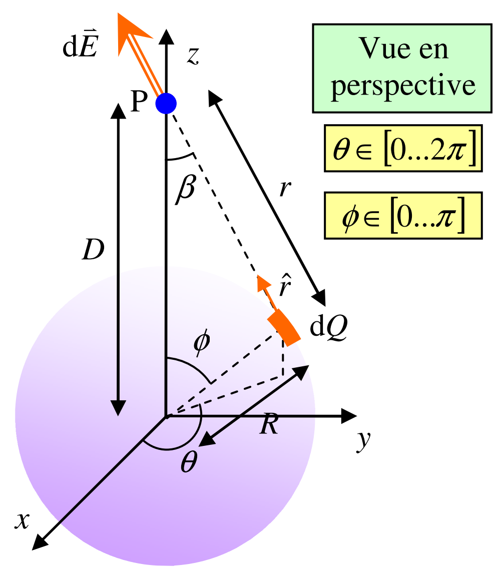
$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos(\beta) = \frac{r^2 + D^2 - R^2}{2Dr}} \qquad \text{(Isoler } \cos(\beta)\text{)}$$

Évaluons à l'aide d'une sommation continue de champs électriques infinitésimaux d$\vec{E}$ le champ électrique total au point **P** en se basant sur le schéma ci-contre :

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \int k \frac{\mathrm{d}Q}{r^2}\hat{r}$$

où

- $\mathrm{d}Q = \sigma R^2 \sin(\phi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$
- $r = \sqrt{D^2 + R^2 - 2DR\cos(\phi)}$
- $\hat{r} = -\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j} + \cos(\beta)\vec{k}$
- $\cos(\beta) = \dfrac{r^2 + D^2 - R^2}{2Dr}$



Ainsi :

$$\vec{E} = \int k \frac{\mathrm{d}Q}{r^2} \hat{r} \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = k\,\sigma\,R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{r^2} \left(-\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j} + \cos(\beta)\vec{k}\right) \qquad \text{(Remplacer } \mathrm{d}Q\text{, } r \text{ et } \hat{r}\text{)}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} = &-k\,\sigma\,R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{r^2} \cos(\theta)\vec{i} \\ \Rightarrow \quad &-k\,\sigma\,R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{r^2} \sin(\theta)\,\vec{j} \qquad \text{(Distribuer l'intégrale)} \\ &+k\,\sigma\,R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{r^2} \cos(\beta)\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} = &-k\,\sigma\,R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi}{r^2} \vec{i} \\ \Rightarrow \quad &-k\,\sigma\,R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin(\theta)\mathrm{d}\theta \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi}{r^2} \vec{j} \qquad (\theta \neq \theta(\phi)\text{, factoriser } \theta) \\ &+k\,\sigma\,R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\cos(\beta)\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi}{r^2} \vec{k} \end{aligned}$$

Le champ électrique $\vec{E}$ sera le résultat de trois intégrales pour les trois orientations *xyz*. Évaluons en premier lieu les résultats sur l'axe $x$ et $y$ et constatons que le champ électrique dans ces deux orientations est toujours nul ($E_x = E_y = 0$) :

<u>Selon l'axe *x* :</u>

$$E_x = -k\,\sigma\,R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi}{r^2} \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad E_x = -k\,\sigma\,R^2 \left[\sin(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)}{r^2}\mathrm{d}\phi \qquad \left(\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C\right)$$

$$\Rightarrow \quad E_x = -k\,\sigma\,R^2 \left(\sin(2\pi) - \sin(0)\right) \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)}{r^2}\mathrm{d}\phi \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad E_x = -k\,\sigma\,R^2 (0) \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)}{r^2}\mathrm{d}\phi \qquad (\sin(2\pi) = \sin(0) = 0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_x = 0} \qquad \text{(Simplifier)}$$

Selon l'axe *y* :

$$\vec{E} = -k\,\sigma\,R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin(\theta)\mathrm{d}\theta \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi}{r^2}$$ (Évaluer précédente)

$$\Rightarrow \quad E_y = -k\,\sigma\,R^2 \left[-\cos(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)\mathrm{d}\phi}{r^2}$$ ( $\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$ )

$$\Rightarrow \quad E_y = -k\,\sigma\,R^2 \left(-\cos(2\pi) - -\cos(0)\right) \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)\mathrm{d}\phi}{r^2}$$ (Évaluer l'intégrale)

$$\Rightarrow \quad E_y = -k\,\sigma\,R^2 (0) \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin(\phi)\mathrm{d}\phi}{r^2}$$ ( $\cos(2\pi) = \cos(0) = 1\,, -1 - -1 = 0$ )

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_y = 0}$$ (Simplifier)

Évaluons maintenant le champ électrique selon l'axe *z* :

$$E_z = k\,\sigma\,R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\cos(\beta)\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi}{r^2}$$ (Évaluer précédente)

$$\Rightarrow \quad E_z = k\,\sigma\,R^2 \left[\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\cos(\beta)\sin(\phi)}{r^2}\mathrm{d}\phi$$ ( $\int \mathrm{d}x = x + C$ )

$$\Rightarrow \quad E_z = k\,\sigma\,R^2 (2\pi) \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\cos(\beta)\sin(\phi)}{r^2}\mathrm{d}\phi$$ (Évaluer l'intégrale)

$$\Rightarrow \quad E_z = 2\pi\,k\,\sigma\,R^2 \int_{\phi=0}^{\pi} \left(\frac{r^2 + D^2 - R^2}{2Dr}\right)\frac{\sin(\phi)}{r^2}\mathrm{d}\phi$$ (Remplacer $\cos(\beta) = \dfrac{r^2 + D^2 - R^2}{2Dr}$ )

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi\,k\,\sigma\,R^2}{D} \int_{\phi=0}^{\pi} \left(r^2 + D^2 - R^2\right)\frac{\sin(\phi)}{r^3}\mathrm{d}\phi$$ (Factoriser constantes, simplifier)

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi\,k\,\sigma\,R^2}{D} \int_{\phi=0}^{\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{D^2 - R^2}{r^3}\right)\sin(\phi)\mathrm{d}\phi$$ (Distribuer $1 / r^3$)

où $\quad r = \sqrt{D^2 + R^2 - 2DR\cos(\phi)}$

Pour résoudre l'intégrale, posons le changement de variable suivant :

$$r = \sqrt{u} \qquad \text{tel que} \qquad u = D^2 + R^2 - 2DR\cos(\phi)$$

Ainsi :

$$\mathrm{d}u = 2DR\sin(\phi)\mathrm{d}\phi \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{2DR} = \sin(\phi)\mathrm{d}\phi$$

Changeons également les bornes de l'intégrale pour passer de $\phi$ à $u$ :

- $\phi = 0 \quad \rightarrow \quad u = D^2 + R^2 - 2DR\cos(0) \quad \Rightarrow \quad u = D^2 + R^2 - 2DR$

  $\Rightarrow \quad \boxed{u = (D-R)^2}$ (Carré parfait)

- $\phi = \pi \quad \rightarrow \quad u = D^2 + R^2 - 2DR\cos(\pi) \quad \Rightarrow \quad u = D^2 + R^2 + 2DR$

  $\Rightarrow \quad \boxed{u = (D+R)^2}$ (Carré parfait)

Ce qui nous donne :

$$E_z = \frac{\pi k \sigma R^2}{D} \int_{\phi=0}^{\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{D^2 - R^2}{r^3} \right) \sin(\phi) \mathrm{d}\phi$$ (Équation précédente)

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi k \sigma R^2}{D} \int_{u=(D-R)^2}^{(D+R)^2} \left( \frac{1}{u^{1/2}} + \frac{D^2 - R^2}{u^{3/2}} \right) \frac{\mathrm{d}u}{2DR}$$ ( $r = \sqrt{u}$ , $\frac{\mathrm{d}u}{2DR} = \sin(\phi)\mathrm{d}\phi$ )

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi k \sigma R}{2D^2} \int_{u=(D-R)^2}^{(D+R)^2} \left( u^{-1/2} + \left(D^2 - R^2\right) u^{-3/2} \right) \mathrm{d}u$$ (Réécriture)

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi k \sigma R}{2D^2} \left( \int_{u=(D-R)^2}^{(D+R)^2} u^{-1/2} \mathrm{d}u + \int_{u=(D-R)^2}^{(D+R)^2} \left(D^2 - R^2\right) u^{-3/2} \, \mathrm{d}u \right)$$ (Distribuer l'intégrale)

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi k \sigma R}{2D^2} \left( \left[ \frac{u^{1/2}}{1/2} \right]_{u=(D-R)^2}^{u=(D+R)^2} + \left(D^2 - R^2\right) \left[ \frac{u^{-1/2}}{-1/2} \right]_{u=(D-R)^2}^{u=(D+R)^2} + \right)$$ ( $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ )

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi k \sigma R}{2D^2} \left( 2\left[u^{1/2}\right]_{u=(D-R)^2}^{u=(D+R)^2} - 2\left(D^2 - R^2\right)\left[u^{-1/2}\right]_{u=(D-R)^2}^{u=(D+R)^2} \right)$$ (Sortir terme ½)

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi k \sigma R}{D^2} \left( \left[u^{1/2}\right]_{u=(D-R)^2}^{u=(D+R)^2} - \left(D^2 - R^2\right)\left[u^{-1/2}\right]_{u=(D-R)^2}^{u=(D+R)^2} \right)$$ (Factoriser 2)

Puisque la borne est $u = (D \pm R)^2$ et qu'il faut évaluer $r = \sqrt{u} = \sqrt{(D \pm R)^2}$ , nous devons nous assurer que le résultat de la racine est positif, car la définition même de $r = \sqrt{u} > 0$ étant la distance entre l'élément d$q$ et le point P est une **distance positive**.

Ainsi, nous aurons les résultats des bornes suivantes selon les deux cas suivants :

| À l'extérieur de la sphère ( $D > R$ ) | | À l'intérieur de la sphère ( $D < R$ ) | |
|---|---|---|---|
| Borne supérieure ( $\sqrt{u} = \sqrt{(D+R)^2}$ ) | Borne inférieure ( $\sqrt{u} = \sqrt{(D-R)^2}$ ) | Borne supérieure ( $\sqrt{u} = \sqrt{(D+R)^2}$ ) | Borne inférieure ( $\sqrt{u} = \sqrt{(D-R)^2}$ ) |
| $\sqrt{u} = D + R$ | $\sqrt{u} = D - R$ | $\sqrt{u} = R + D$ | $\sqrt{u} = R - D$ |

Cas #1 : $D > R$ (À l'extérieur de la sphère)

$$E_z = \frac{\pi k \sigma R}{D^2}\left(\left[u^{1/2}\right]_{u=(D-R)^2}^{u=(D+R)^2} - \left(D^2 - R^2\right)\left[u^{-1/2}\right]_{u=(D-R)^2}^{u=(D+R)^2}\right) \qquad \text{(Eq. précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi k \sigma R}{D^2}\left(\left((D+R)-(D-R)\right) - \left(D^2 - R^2\right)\left(\frac{1}{(D+R)} - \frac{1}{(D-R)}\right)\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi k \sigma R}{D^2}\left(2R - \left(D^2 - R^2\right)\frac{(D-R)-(D+R)}{(D+R)(D-R)}\right) \qquad \text{(Dénomi. commun)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi k \sigma R}{D^2}\left(2R - \left(D^2 - R^2\right)\frac{(-2R)}{D^2 - DR + DR - R^2}\right) \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{2\pi k \sigma R^2}{D^2}\left(1 + \frac{D^2 - R^2}{D^2 - R^2}\right) \qquad \text{(Factorier } 2R\text{, simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{2\pi k \sigma R^2}{D^2}(1+1) \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{4\pi k \sigma R^2}{D^2} \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{kQ}{D^2} \quad \text{(si } D > R\text{, à l'extérieur)} \quad \blacksquare \ (1) \qquad \text{(Rempl. } Q = 4\pi R^2 \sigma\text{)}$$

Cas #2 : $D < R$ (À l'intérieur de la sphère)

$$E_z = \frac{\pi k \sigma R}{D^2}\left(\left[u^{1/2}\right]_{u=(D-R)^2}^{u=(D+R)^2} - \left(D^2 - R^2\right)\left[u^{-1/2}\right]_{u=(D-R)^2}^{u=(D+R)^2}\right) \qquad \text{(Eq. précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi k \sigma R}{D^2}\left(\left((R+D)-(R-D)\right) - \left(D^2 - R^2\right)\left(\frac{1}{(R+D)} - \frac{1}{(R-D)}\right)\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi k \sigma R}{D^2}\left(2D - \left(D^2 - R^2\right)\frac{(R-D)-(R+D)}{(R+D)(R-D)}\right) \qquad \text{(Dénomi. commun)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{\pi k \sigma R}{D^2}\left(2D - \left(D^2 - R^2\right)\frac{-2D}{R^2 - RD + RD - D^2}\right) \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{2\pi k \sigma R}{D}\left(1 + \frac{D^2 - R^2}{R^2 - D^2}\right) \qquad \text{(Factoriser } 2D\text{, simpl.)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{2\pi k \sigma R}{D}(1-1) \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = 0 \quad \text{(si } D < R\text{, à l'intérieur)} \quad \blacksquare \ (2) \qquad \text{(Simplifier)}$$