Chapitre 5.5 – L'écoulement des liquides avec viscosité

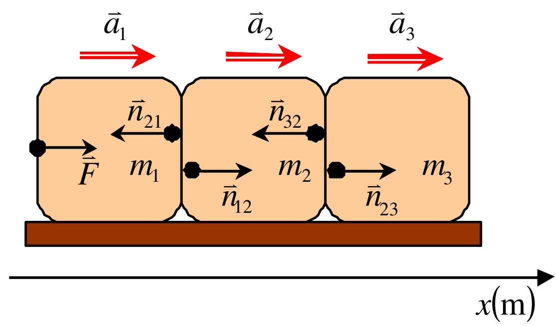
Théorème de la l'écoulement horizontal des fluides

Le théorème de l'écoulement horizontal dans un système subissant une variation de pression s'énonce de la façon suivante :

> *Dans un système de masses incompressibles horizontales de surface identique, il y aura écoulement s'il y a une variation de pression le long de l'axe horizontal. L'écoulement s'effectue toujours dans le sens décroissant de la pression.*

<u>Preuve :</u>

Considérons un groupe de 3 cubes de surface A alignés horizontalement. On applique une force $\vec{F}$ du côté gauche afin de pousser les cubes vers le mur. Les cubes sont incompressibles (le volume ne change pas sous la présence d'une force).



À partir de la 2[ième] loi de Newton selon l'axe x ($\sum F_x = ma_x$), évaluons les forces normales de contact entre les cubes. Puisque tous les cubes sont incompressibles, ils auront tous la même accélération a_x :

Bloc m_1	Bloc m_2	Bloc m_3
$F - n_{21} = m_1 a_x$	$n_{12} - n_{32} = m_2 a_x$	$n_{23} = m_3 a_x$

En utilisant la 3[ième] loi de Newton ($\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$), nous pouvons évaluer l'accélération des blocs après avoir additionné toutes nos équations. Voici l'expression de l'accélération :

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a_x$$

Supposons que tous les blocs ont la même masse. L'accélération a_x aura la forme suivante :

$$m = m_1 = m_2 = m_3 \quad \Rightarrow \quad F = (3m)a \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = F/3m}$$

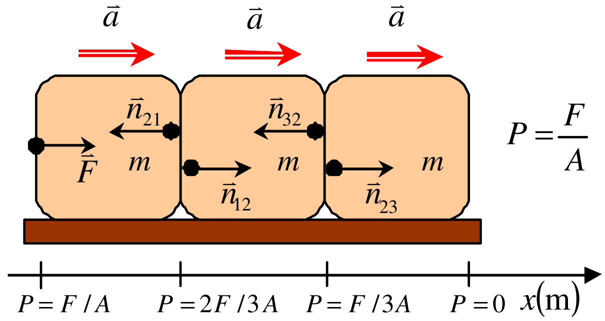
À partir de cette accélération, évaluons la force normale appliquée sur chacun des surfaces de nos blocs :

$$n_{23} = m_3 a_x \quad \Rightarrow \quad n_{23} = (m)(F/3m) \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_{23} = F/3}$$

$$n_{12} - n_{32} = m_2 a_x \quad \Rightarrow \quad n_{12} - (F/3) = (m)(F/3m) \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_{12} = 2F/3}$$

$$F - n_{21} = m_1 a_x \quad \Rightarrow \quad F - (2F/3) = (m)(F/3m) \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 3F/3}$$

Évaluons la pression sur l'ensemble des surfaces verticales des différents cubes :



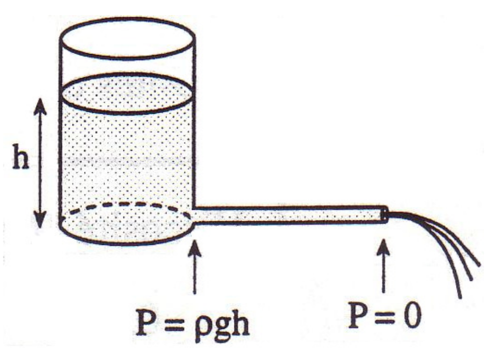
Constatations :

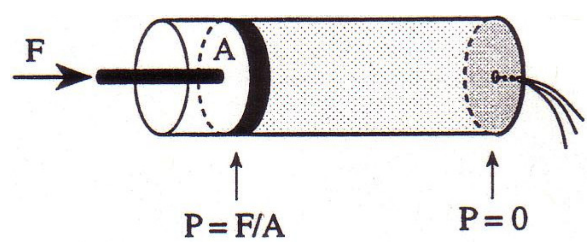
- La pression mesurée sur l'axe x dépend de la force externe $\vec{F}$ appliquée ($P_{externe} = F/A$).
- Puisque les masses des blocs sont identiques, la variation de pression entre chaque bloc est constante ($|\Delta P| = F/3A$, le nombre 3 représente le nombre de bloc).
- Les blocs accélèrent dans le sens décroissant de la pression.

On peut ainsi conclure que l'accélération des blocs sera dans le sens décroissant de la variation de la pression. ■

Écoulement sous une différence de pression

Lorsqu'il y aura une différence de pression aux extrémités d'un tuyau rempli d'eau à section ouverte, il y aura écoulement d'un liquide :

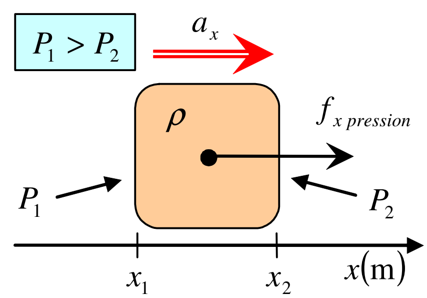




1) Les pressions indiquées sur les schémas sont des **pressions relatives**.
2) La pression $P = \rho g h$ est <u>**valide seulement lorsque**</u> l'extrémité droite du tube est bouchée. Lorsqu'elle est ouverte, la pression diminue car la colonne de liquide n'est plus immobile en raison d'une augmentation de l'énergie cinétique dans la colonne de liquide.

Force de pression

La **force de pression** est une **force** par unité de **volume** associée à une variation de pression. Celle-ci peut être évaluée grâce à la **variation de pression** ΔP par unité de **longueur** Δx. Il est important de noter que la force de pression est **orientée** dans le **sens décroissant** de la **variation de pression**. De plus, la force de pression ne s'applique pas sur une masse mais sur densité de masse[1] (masse volumique) ρ :



Selon l'axe x | Vectorielle[2]

$$f_{x\,pression} = -\frac{\Delta P}{\Delta x} \qquad \vec{f}_{pression} = -\vec{\nabla} P$$

où
- ΔP : Variation de pression (Pa) ($\Delta P = P_2 - P_1$)
- Δx : Variation de position (m) ($\Delta x = x_2 - x_1$)
- $f_{x\,pression}$: Force de pression (N/m^3)
- ρ : Masse volumique (kg/m^3)

Résistance d'un liquide dans un tuyau

Expérimentalement, on réalise que si l'on applique une **différence de pression** aux **extrémités d'un tuyau** rempli d'eau à section ouverte, l'eau s'écoule avec un **débit constant** (le débit de l'eau provenant d'un robinet est constant). Puisque le débit D dans le tuyau est initialement nulle et devient constant très rapidement, cela signifie qu'il y a de la **résistance** dans le processus d'écoulement d'un liquide dans un tuyau.


Stabilisation très rapide d'une debit constant après l'ouverture d'un robinet.

Le frottement appliqué par les parois du tuyau sur le liquide provient de la **viscosité** (adhérence du liquide avec les parois) du liquide. Expérimentalement, on constante que la force de viscosité de pression f_{vis} est une fonction du débit du liquide D, du rayon r du tuyau et du régime d'écoulement :

$$f_{\mathrm{vis}} = f_{\mathrm{vis}}(D, r) \quad \text{et} \quad [f_{\mathrm{vis}}] = \mathrm{N/m^3}$$

Analogie :

On peut comparer le débit constant dans un tuyau à une vitesse limite atteinte lors d'un saut en parachute lorsque la résistance de l'air est égale à la force gravitationnelle.

---

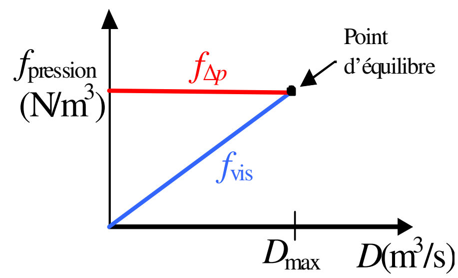
[1] La preuve sera présentée à la page suivante à l'aide de la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton.

[2] Le gradient ($\vec{\nabla}$) est un opérateur sur une fonction scalaire et produit une fonction vectorielle. On définit le gradient en coordonnée cartésienne (x, y, z) de la façon suivante : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

Lorsqu'on applique une différence de pression aux deux extrémités d'un tuyau, le débit évolue de la façon suivante :

1) Accélération :

Lorsque le débit est faible, la force de pression causée par la différence de pression est supérieure à la force de viscosité de pression et le fluide peut accélérer. Le débit augmentera.

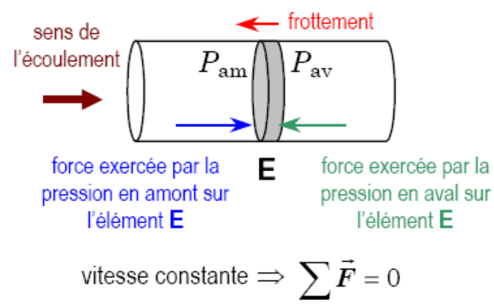


2) Débit maximum :

Lorsque le débit est maximum, la force causée par la différence de pression est égale à la force de frottement et le liquide ne peut pas accélérer. Le débit est alors maximisé.

La résistance hydraulique

Un fluide visqueux s'écoulera en régime stationnaire non turbulent à un débit D constant proportionnelle à la différence de pression ΔP qu'il subit et en proportion inverse à la résistance hydraulique associé à l'écoulement :



$$\Delta P = -R\,D$$

(lorsque $\sum \vec{f} = 0$, régime stationnaire)

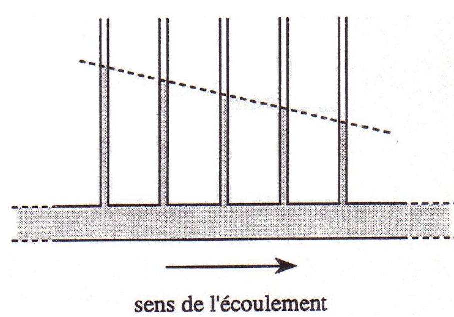
où ΔP : Variation de la pression aux extrémités du tuyau (Pa)

D : Débit du liquide à l'équilibre (m^3/s)

R : Résistance hydraulique associée à la section de tuyau ($\text{Pa} \cdot \text{s} / \text{m}^3$)

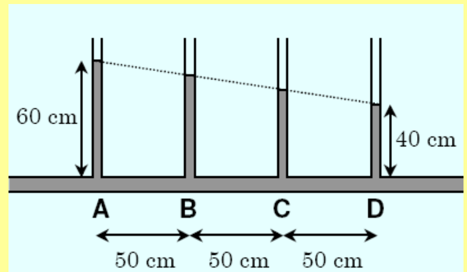
Remarque :

1) Le signe négatif signifie qu'un débit positif (bonne orientation) représente un écoulement de la pression la plus élevée vers la pression la moins élevée.
2) La **résistance hydraulique** R dépend de la **taille**, de la **forme** et la **longueur** de la canalisation, des **propriétés du fluide** (comme la viscosité) et du **régime d'écoulement**. L'expression mathématique peut être très complexe.
3) Dans un tuyau uniforme à **écoulement laminaire** :
   - La résistance hydraulique est constante le long de la canalisation.
   - La différence de pression varie de façon constante.
   - On peut mesurer l'évolution de la perte de pression pour lutter contre la force de pression de viscosité du fluide grâce au principe de pression hydrostatique.



Réduction de la pression lors d'un écoulement laminaire visqueux dans une canalisation régulière.

Situation 2 : ***La diminution de la pression*****.** Du mercure ($\rho = 13600\ \text{kg/m}^3$) circule de gauche à droite dans un tuyau horizontal (schéma ci-contre) avec un débit de $3\ \text{cm}^3/\text{s}$. À intervalles de 50 cm le long du tuyau horizontal se trouvent quatres tubes verticaux (**A**, **B**, **C** et **D**) ouverts dans le haut. Dans le tube **A**, le mercure s'élève à 60 cm; dans le tube **D**, situé 1,5 m plus loin, le mercure s'élève à 40 cm. On désire déterminer la résistance hydraulique de la portion de tuyau située entre le tube **A** et le tube **D**.



Évaluons la pression relative dans le bas du tube **A** :

$$\tilde{P}_A = \rho\, g\, h_A \quad \Rightarrow \quad \tilde{P}_A = (13600)(9{,}8)(0{,}60) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{P}_A = 7{,}997 \times 10^4\ \text{Pa}}$$

Évaluons la pression relative dans le bas du tube **D** :

$$\tilde{P}_D = \rho\, g\, h_D \quad \Rightarrow \quad \tilde{P}_D = (13600)(9{,}8)(0{,}40) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{P}_D = 5{,}331 \times 10^4\ \text{Pa}}$$

Évaluons le débit en m^3/s :

$$D = 3\ \text{cm}^3/\text{s} \times \left(\frac{1\,\text{m}}{100\,\text{cm}}\right)^3 = 3 \times 10^{-6}\ \text{m}^3/\text{s}$$

Évaluons la résistance hydraulique de la portion de tuyau située entre **A** et **D** :

$\Delta P = -R\, D \quad \Rightarrow \quad (P_D - P_A) = -R\, D$ (Remplacer $\Delta P = P_D - P_A$)

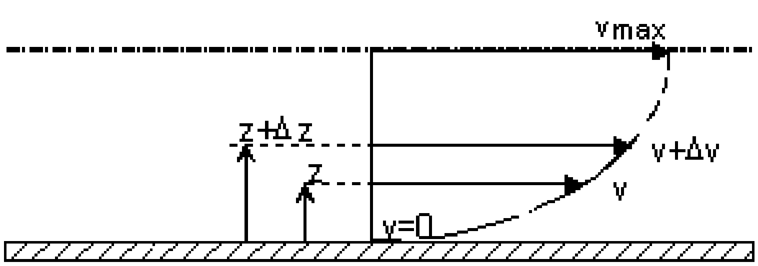
$\Rightarrow \quad (5{,}331 \times 10^4) - (7{,}997 \times 10^4) = -R(3 \times 10^{-6})$ (Remplacer val. num.)

$\Rightarrow \quad \boxed{R = 8{,}887 \times 10^9\ \text{Pa} \cdot \text{s/m}^3}$ (Évaluer R sur 1,5 m)

Profil de vitesse dans l'écoulement laminaire

En construction …

$$v = v(z) \qquad \text{tel que} \qquad v(z = \text{"centre"}) = v_{max}$$



Dans ce schéma, on considère la vitesse près des parois à $v(z = 0) = 0$

La loi de Poiseuille

Jean-Louis-Marie Poiseuille (1797-1869)

En 1844, le médecin français Jean-Louis-Marie Poiseuille permet d'établir expérimentalement une loi régissant **l'écoulement laminaire** en régime stationnaire des fluides **visqueux** dans des **tubes** (tuyau à ouverture circulaire). Ayant effectué son expérimentation sur l'écoulement sanguin, Poiseuille fut en mesure d'établir un lien entre le **débit sanguin** D et la **variation de pression** sanguine ΔP le long d'un vaisseau sanguin de **longueur** L. Les variations de pression dépendaient également de la **viscosité** du sang η ainsi que du **rayon** r du vaisseau sanguin :

$$\Delta P = -R\,D \qquad \text{et} \qquad R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

où ΔP : Variation de la pression aux extrémités du tuyau (Pa)
η : Viscosité du liquide (Ns/m^2)
L : La longueur du tuyau (m)
r : Rayon du tuyau (m)
D : Débit du liquide à l'équilibre (m^3/s)

Preuve :

En construction …

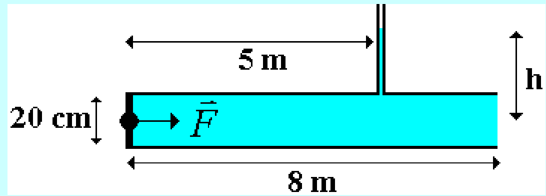
Profil de vitesse : $v(r) = v_{max}\left(1 - r^2/R^2\right)$ où R : Rayon du tuyau circulaire

La viscosité de fluide

La viscosité représente une résistance à un écoulement laminaire d'un fluide. Il est important de préciser que la viscosité dépend de plusieurs facteurs comme la température :

Substances	Viscosité η (Ns/m^2)	Température (C)
Eau	0,001	20
Plasma sanguin	0,0015	37
Sang	0,004	37
Mercure	0,0015	20
Air	0,000018	20

Situation B : *La hauteur de la colonne d'eau*. Un piston cylindrique de 20 cm de diamètre pousse de l'eau contenue dans un tuyau cylindrique de 8 m de long avec une force de 50 N. Une petite cheminée est située à 5 m du piston. On désire évaluer la hauteur de la colonne d'eau qui s'élèvera dans la cheminée. (On suppose l'approximation de la loi de Poiseuille valide.)



Évaluons la **pression relative** (retirer la pression atmosphérique) au piston ($x = 0$) :

$$P_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad P_0 = \frac{(50)}{\pi(0{,}10)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_0 = 1{,}59 \times 10^3 \ \text{Pa}}$$

Nous avons la **pression relative** suivante en haut de la colonne d'eau et au bout du tuyau ($x = 8$) :

$$P_8 = P_{haut\ colonne} = 0 \ \text{Pa}$$

Nous pouvons évaluer la différence de pression aux deux extrémités du tuyau :

$$\Delta P = P_8 - P_0 \quad \Rightarrow \quad \Delta P = (0) - \left(1{,}59 \times 10^3\right) \Rightarrow \quad \boxed{\Delta P = -1{,}59 \times 10^3 \,\text{Pa}}$$

Nous pouvons évaluer le débit d'eau dans le tuyau :

$$\Delta P = -\frac{8\eta L}{\pi r^4} D \quad \Rightarrow \quad D = -\Delta P \frac{\pi r^4}{8\eta L}$$

$$\Rightarrow \quad D = -\left(-1{,}59 \times 10^3\right) \frac{\pi (0{,}10)^4}{8(0{,}001)(8)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D = 7{,}80 \ \text{m}^3/\text{s}}$$

Puisque le **débit est constant** dans un tuyau, nous pouvons évaluer la **pression relative** à 5 m du piston ($x = 5$):

$$\Delta P = -\frac{8\eta L}{\pi r^4} D \quad \Rightarrow \quad P_5 - P_0 = -\frac{8\eta L}{\pi r^4} D$$

$$\Rightarrow \quad P_5 = -\frac{8\eta L}{\pi r^4} D + P_0$$

$$\Rightarrow \quad P_5 = -\frac{8(0{,}001)(5)}{\pi (0{,}1)^4}(7{,}80) + \left(1{,}59 \times 10^3\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_5 = 0{,}60 \times 10^3 \,\text{Pa}}$$

Puisque l’eau à cet endroit peut monter dans la cheminée, la pression en bas de la cheminée doit être égale à la pression produite par la colonne d’eau :

$$P_5 = P_{haut\ colonne} + \rho\, g\, h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{P_5 - P_{haut\ colonne}}{\rho\, g}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{\left(0{,}60\times10^3\right) - (0)}{(1000)(9{,}8)}$$

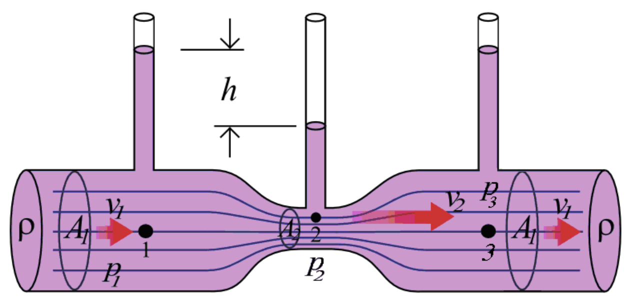
$$\Rightarrow \quad \boxed{h = 0{,}061\ \text{m}}$$

Effet Venturi avec résistance

Lors de l’effet Venturi, la réduction de l’ouverture d’une canalisation peut augmenter localement la résistance hydraulique et occasionner une perte de pression permanente pour des causes de viscosité. La pression du fluide après son passage dans le venturi va augmenter, mais pas à sa valeur initiale (avant le passage dans la zone de résistance) en raison d’une perte de densité énergétique.

<u>Avec liquide parfait :</u>

- $D_1 = D_2$
- $A_1 > A_2$
- $v_1 < v_2$
- $P_1 > P_2$
- $P_2 = P_1 - \rho g h$
- $P_1 = P_3$



<u>Avec liquide visqueux :</u> (chute de pression par résistance hydraulique, $\Delta P = -RD$)

- $D_1 = D_2$
- $A_1 > A_2$
- $v_1 < v_2$
- $P_1 > P_2$
- $P_2 = P_1 - \rho g h$
- $P_3 = P_1 - \rho g H$

où $\rho g H = RD$