Chapitre 1.14 – L'intégrale en cinématique

L'intégrale

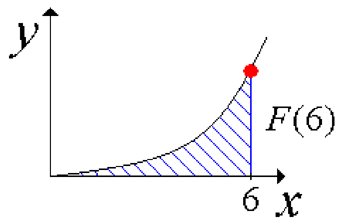
En mathématique, on définit l'intégrale d'une fonction $f(x)$ tel que

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad F'(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

où $F(x)$ est la fonction qui donne la valeur de l'aire sous la courbe de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[0..x]$. L'intégrale est l'opération mathématique inverse de la dérivée.

Exemple graphique :

L'aire sous la courbe $f(x)$ dans l'intervalle $[0..6]$ est égale à $F(6)$.



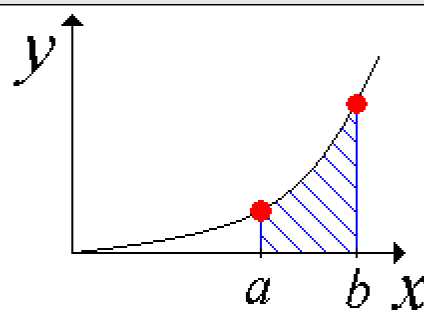
Exemple numérique :

Soit $f(5) = 4$ et $F(5) = 12$

À la coordonnée $x = 5$, la valeur associée est 4 et l'aire sous la courbe dans l'intervalle $[0..5]$ est égale à 12.

Le théorème fondamental du calcul

Afin d'évaluer l'aire sous la courbe de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[a..b]$ plutôt que dans l'intervalle $[0..a]$, on peut utiliser le théorème suivant :

Formule	Représentation graphique
$\displaystyle\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$	

La position et la vitesse à l'aide de l'intégrale

Nous avons donné la définition suivante à la vitesse et à l'accélération :

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad a_x(t) = \frac{\mathrm{d}\,v_x(t)}{\mathrm{d}t}$$

Appliquons le calcul différentiel à la définition de la vitesse et de l'accélération afin d'obtenir une définition intégrale de la position et de la vitesse :

Intégrale de l'accélération :

$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}\,v_x(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}v_x(t) = a_x(t)\,\mathrm{d}t$ (Isoler $\mathrm{d}v_x(t)$)

$\Rightarrow \quad \int_{t=t_i}^{t} \mathrm{d}v_x(t) = \int_{t=t_i}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t$ (Appliquer l'intégrale de $t = t_i \to t$)

$\Rightarrow \quad \left[v_x(t)\right]_{t_i}^{t} = \int_{t=t_i}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t$ (Résoudre l'intégrale sur v_x)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_x(t) - v_{xi} = \int_{t=t_i}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t}$ (Évaluer l'intégrale, $v_{xi} = v_x(t_i)$)

Intégrale de la vitesse :

$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x(t) = v_x(t)\,\mathrm{d}t$ (Isoler $\mathrm{d}x(t)$)

$\Rightarrow \quad \int_{t=t_i}^{t} \mathrm{d}x(t) = \int_{t=t_i}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t$ (Appliquer l'intégrale de $t = t_i \to t$)

$\Rightarrow \quad \left[x(t)\right]_{t_i}^{t} = \int_{t=t_i}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t$ (Résoudre l'intégrale sur v_x)

$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) - x_i = \int_{t=t_i}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t}$ (Évaluer l'intégrale, $x_i = x(t_i)$)

Grâce au calcul différentiel, on peut maintenant utiliser la définition de l'intégrale et donner la définition suivantes à la position, la vitesse et à l'accélération :

La position :	$x(t) - x_i = \int_{t=t_i}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t$	unité : $[x(t)] = \mathrm{m}$
La vitesse :	$v_x(t) - v_{xi} = \int_{t=t_i}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t$	unité : $[v_x(t)] = \mathrm{m/s}$
L'accélération :	$a_x(t)$	unité : $[a_x(t)] = \mathrm{m/s^2}$

Situation A : *Une planche à roulettes sur un plan incliné : calcul avec intégral.* À partir de l'équation de la vitesse $v_x(t) = 1 - 0{,}5t$ associés au mouvement de la planche à roulettes de la situation 3 du chapitre 1.3, on désire évaluer l'équation de la position $x(t)$ sachant que la position à $t = 0$ est égale à 1,8 m.

À partir de la version intégrale de la position, évaluons l'équation de la position. Utilisons $t = 0$ comme borne inférieure à l'intégrale, car la position est connue à ce temps :

$$x(t) - x_i = \int_{t=t_i}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = \int_{t=0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Bornes : } t = 0 \rightarrow t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = \int_{t=0}^{t} (1 - 0{,}5t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Remplacer } v_x(t) = 1 - 0{,}5t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = \int_{t=0}^{t} \mathrm{d}t + \int_{t=0}^{t} -0{,}5t\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Distribuer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = \int_{t=0}^{t} \mathrm{d}t - 0{,}5\int_{t=0}^{t} t\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Factoriser les constantes des intégrales)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = [t]_0^t - 0{,}5\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t \qquad \text{(Résoudre l'intégrale sur } v_x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = ((t) - (0)) - 0{,}5\left(\frac{(t)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

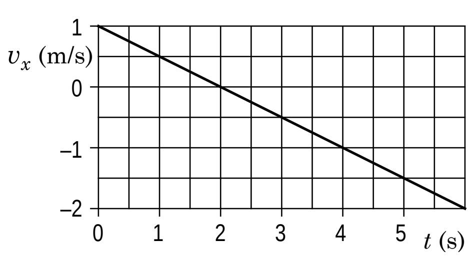
$$\Rightarrow \quad x(t) = t - 0{,}25t^2 + x_0 \qquad \text{(Isoler } x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = t - 0{,}25t^2 + (1{,}8) \qquad \text{(Remplacer } x_0 = 1{,}8\text{)}$$

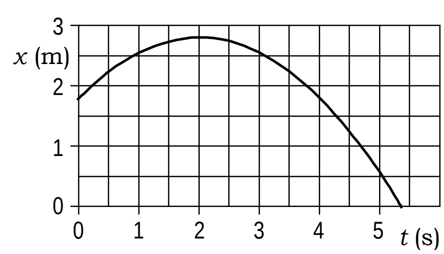
$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = -0{,}25t^2 + t + 1{,}8} \qquad \text{(Réécriture)}$$

Voici une représentation graphique de nos deux équations du mouvement :

Graphique de $v_x(t)$:



Graphique de $x(t)$:



Situation B : ***Équation du mouvement d'une accélération constante.*** Un mobile se déplace avec une accélération constante a_x. À $t = 0$, le mobile occupait la position x_0 et se déplaçait à la vitesse v_{x0}. On désire évaluer **(a)** l'équation de la vitesse du mobile et **(b)** l'équation de la position du mobile.

(a) À partir de la version intégrale de la vitesse, évaluons l'équation de la vitesse. Puisque la vitesse connue est exprimée à $t = 0$, utilisons $t = 0$ comme borne inférieure à l'intégrale :

$$v_x(t) - v_{xi} = \int_{t=t_i}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \quad v_x(t) - v_{x0} = \int_{t=0}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Bornes : } t = 0 \rightarrow t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) - v_{x0} = \int_{t=0}^{t} a_x\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Remplacer } a_x(t) = a_x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) - v_{x0} = a_x \int_{t=0}^{t} \mathrm{d}t \qquad \text{(Factoriser constante)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) - v_{x0} = a_x [t]_0^t \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) - v_{x0} = a_x\big((t) - (0)\big) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x(t) = a_x t + v_{x0}} \qquad \text{(Isoler } v_x(t)\text{)}$$

(b) À partir de la version intégrale de la position, évaluons l'équation de la position. Puisque la position connue est exprimée à $t = 0$, utilisons $t = 0$ comme borne inférieure à l'intégrale :

$$x(t) - x_i = \int_{t=t_i}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x(t) - x_0 = \int_{t=0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Bornes : } t = 0 \rightarrow t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = \int_{t=0}^{t} (a_x t + v_{x0})\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Remplacer } v_x(t) = a_x t + v_{x0}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = a_x \int_{t=0}^{t} t\,\mathrm{d}t + v_{x0} \int_{t=0}^{t} \mathrm{d}t \qquad \text{(Distribuer et factoriser)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = a_x \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t + v_{x0} [t]_0^t \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = a_x \left(\frac{(t)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) + v_{x0}\big((t) - (0)\big) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{x0} t + x_0} \qquad \text{(Isoler } x(t)\text{)}$$

Remarque : On réalise que l'on retombe exactement sur les équations du MUA.

Résumé de la cinématique

Voici un court résumé des relations existants entre la position, la vitesse et l'accélération :

Position	$x(t)$	$\leftarrow$	$x(t)$	**Position**
	$\downarrow$		$\uparrow$	
dérivée	$\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}$		$\int v_x(t)\mathrm{d}t + x_0$	**intégrale**
	$\downarrow$		$\uparrow$	
Vitesse	$v_x(t)$	$\leftrightarrow$	$v_x(t)$	**Vitesse**
	$\downarrow$		$\uparrow$	
dérivée	$\dfrac{\mathrm{d}\,v_x(t)}{\mathrm{d}t}$		$\int a_x(t)\mathrm{d}t + v_{x0}$	**intégrale**
	$\downarrow$		$\uparrow$	
Accélération	$a_x(t)$	$\leftrightarrow$	$a_x(t)$	**Accélération**

Exercices

Exercice A : ***La voiture jouet téléguidée.*** À $t = 0$, une voiture jouet téléguidée est située à $x = 5\ \text{m}$. Sur un intervalle de temps entre 0 et 3 s, sa vitesse est donnée par la fonction $v_x(t) = 2t$ où v_x est en mètres par seconde et t est en seconde. Évaluez la position de la voiture à $t = 2\ \text{s}$.

Exercice B : ***La particule accélérée.*** L'accélération d'une particule est donnée par l'équation $a_x(t) = 3t$. Sachant que $x_0 = 4\ \text{m}$ et $v_{x0} = 2\ \text{m/s}$, calculez **(a)** l'accélération à 5 s, **(b)** la vitesse à 5 s et **(c)** la position à 5 s.

Exercice C : ***La vitesse du mobile.*** La vitesse d'un mobile en fonction du temps est donnée par l'équation suivante :

$$v_x(t) = 0{,}4t^2 + 3t$$

a) Évaluez la fonction qui permet d'évaluer l'accélération du mobile.

b) De combien de mètres s'est-il déplacé entre 1 s et 3 s ?

Solutions

Exercice A : ***La voiture jouet téléguidée*****.**

À partir de l'équation de base :

$$x(t) - x_0 = \int_{t=0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_0 = \int_{t=0}^{2} v_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Bornes : } t = 0 \to t = 2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 - x_0 = \int_{t=0}^{2} 2t\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Remplacer } v_x(t) = 2t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 - x_0 = 2\int_{t=0}^{2} t\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Factoriser constante)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 - x_0 = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 - x_0 = 2\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 - x_0 = 4 \qquad \text{(Calcul)}$$

On peut maintenant isoler notre position $x(t = 2) = x_2$:

$$x_2 - x_0 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 + x_0$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 4 + (5)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 9\ \text{m}}$$

Exercice B : ***La particule accélérée.***

À partir de l'équation de l'accélération, nous pouvons évaluer l'accélération à 5 s :

$$a_x(t=5) = 3(5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_x(t=5) = a_{x5} = 15 \ \text{m/s}^2} \quad \textbf{(a)}$$

À partir de l'équation de l'accélération, nous pouvons évaluer l'équation de la vitesse :

$$v_x(t) - v_{x0} = \int_{t=0}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad v_x(t) - v_{x0} = \int_{t=0}^{t} 3t\,\mathrm{d}t \quad \text{(Remplacer } a_x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) - v_{x0} = 3\int_{t=0}^{t} t\,\mathrm{d}t \quad \text{(Remplacer } a_x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) - v_{x0} = 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t \quad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) - v_{x0} = 3\left(\frac{(t)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) \quad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) = \frac{3}{2}t^2 + v_{x0} \quad \text{(Isoler } v_x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2} \quad \text{(Remplacer } v_{x0} = 2 \ \text{m/s)}$$

On peut évaluer maintenant la vitesse à 5 s :

$$v_x(t=5) = \frac{3}{2}(5)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x(t=5) = v_{x5} = 39{,}5 \ \text{m/s}} \quad \textbf{(b)}$$

À partir de l'équation de vitesse, nous pouvons évaluer l'équation de la position :

$$x(t) - x_0 = \int_{t=0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x(t) - x_0 = \int_{t=0}^{t}\left(\frac{3}{2}t^2 + 2\right)\mathrm{d}t \quad \text{(Remplacer } v_x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = \frac{3}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^t + 2[t]_0^t \quad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = \frac{1}{2}t^3 + 2t \quad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}t^3 + 2t + x_0 \quad \text{(Isoler } x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}t^3 + 2t + 4 \quad \text{(Remplacer } x_0 = 4 \ \text{m)}$$

On peut évaluer maintenant la position à 5 s :

$$x(t=5) = \frac{1}{2}(5)^3 + 2(5) + 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t=5) = x_5 = 76{,}5 \ \text{m}} \quad \textbf{(c)}$$

Exercice C : ***La vitesse du mobile*.**

À partir de l'équation de vitesse, nous pouvons évaluer l'équation de l'accélération :

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad a_x(t) = \frac{\mathrm{d}(0{,}4t^2 + 3t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Remplacer } v_x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad a_x(t) = 0{,}4\frac{\mathrm{d}(t^2)}{dt} + 3\frac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Distribution et factorisation)}$$

$$\Rightarrow \quad a_x(t) = 0{,}4(2t) + 3(1) \qquad \text{(Évaluer les dérivées)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_x(t) = 0{,}8t + 3} \quad \textbf{(a)} \qquad \text{(Simplification)}$$

On peut évaluer le déplacement grâce à l'équation de la vitesse et la notion d'intégrale :

$$x(t) - x_i = \int_{t=t_i}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad x_3 - x_1 = \int_{t=1}^{3} v_x(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Borne : } t=1 \to t=3\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 - x_1 = \int_{t=1}^{3} (0{,}4t^2 + 3t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Remplacer } v_x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 - x_1 = 0{,}4\int_{t=1}^{3} t^2\,\mathrm{d}t + 3\int_{t=1}^{3} t\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Distribution et factorisation)}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 - x_1 = 0{,}4\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^3 + 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^3 \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 - x_1 = 0{,}4\left(\frac{(3)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3}\right) + 3\left(\frac{(3)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) \qquad \text{(Évaluer Intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 - x_1 = (3{,}467) + (12) \qquad \text{(Calcul)}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 - x_1 = 15{,}467 \qquad \text{(Calcul)}$$

Puisque nous cherchons le déplacement entre 1 et 3 s, nous avons le résultat suivant :

$$\Delta x_{1\to 3} = x_3 - x_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x_{1\to 3} = 15{,}467 \text{ m}} \quad \textbf{(b)}$$