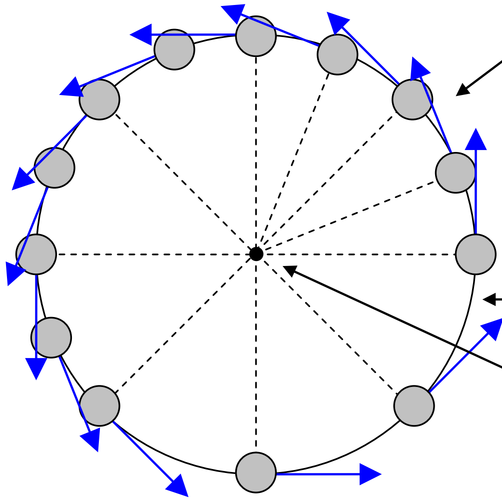
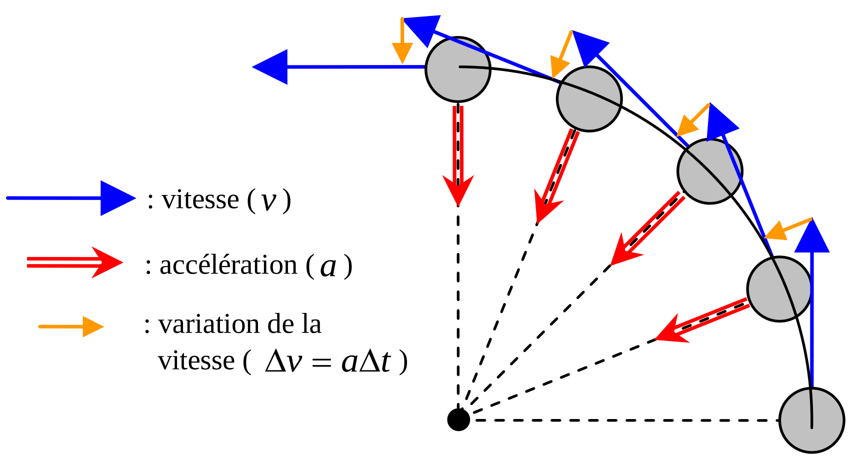
Chapitre 1.12a – Le mouvement circulaire et l’accélération centripète

Accélération dans un mouvement circulaire

Un **mouvement circulaire uniforme** (MCU) est un mouvement dont le **module** de la **vitesse** est **constant**, mais dont **l’orientation change perpétuellement** pour former une **trajectoire circulaire**. Analysons l’évolution de l’orientation de la vitesse d’un objet effectuant un MCU :



Puisque le module de la vitesse *v* ne change pas, mais qu’il y a réorientation perpétuelle de la vitesse, alors il y a une accélération *a*. On remarque que le **module** de **l’accélération** est **constant**, mais qu’elle est **<u>toujours</u> orientée** vers le **centre** de la **trajectoire circulaire** :

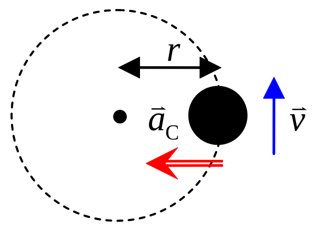


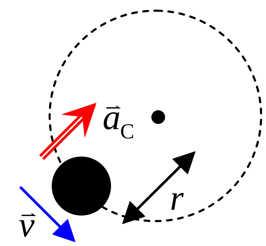
<u>Conclusion :</u> Un MCU nécessite une accélération *a* pointant toujours vers le centre de la trajectoire circulaire.

Accélération centripète

L'accélération centripète a_C est le nom que porte **l'accélération** permettant à un objet d'effectuer une **trajectoire circulaire** de rayon r à **vitesse constante** v. Cette accélération de module constant est toujours orientée vers le centre de la trajectoire circulaire :

$$a_C = \frac{v^2}{r}$$





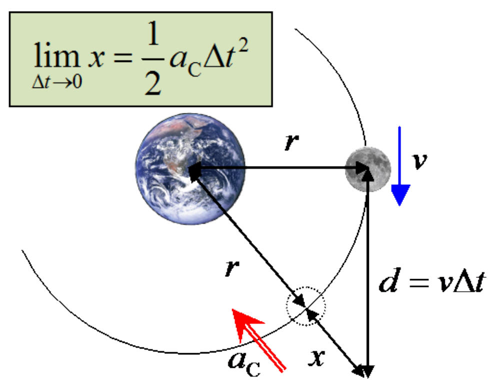
où a_C : Accélération centripète orientée vers le centre de la trajectoire circulaire (m/s^2)

v : Module de la vitesse de l'objet le long de la trajectoire circulaire ($v \perp a_C$) (m/s)

r : Rayon de la trajectoire circulaire (m)

<u>Preuve :</u>

Approximons un mouvement circulaire comme étant un mouvement à vitesse constante v suivit d'un mouvement à accélération constante a_C tel qu'illustré sur ce schéma ci-contre. Appliquons le théorème de Pythagore afin d'évaluer une relation entre nos distances r, d et x :



$$(r+x)^2 = r^2 + d^2 \qquad \text{(Théorème Pythagore)}$$

$$\Rightarrow \quad r^2 + 2xr + x^2 = r^2 + d^2 \qquad \text{(Développer carré)}$$

$$\Rightarrow \quad 2xr + x^2 = d^2 \qquad \text{(Simplifier } r^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{x^2}{2r} = \frac{d^2}{2r} \qquad \text{(Diviser par } 2r\text{)}$$

Remplaçons la distance parcourue à vitesse constante d par le produit de la vitesse v et du temps de parcours Δt afin d'évaluer la distance $x = ½\, a_C\, \Delta t^2$ (un MUA) :

$$x + \frac{x^2}{2r} = \frac{d^2}{2r} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{(v\Delta t)^2}{2r} - \frac{x^2}{2r} \qquad \text{(Isoler terme } x \text{ et remplacer } d = v\Delta t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\frac{v^2}{r}\Delta t^2 - \frac{x^2}{2r} \qquad \text{(Réécriture)}$$

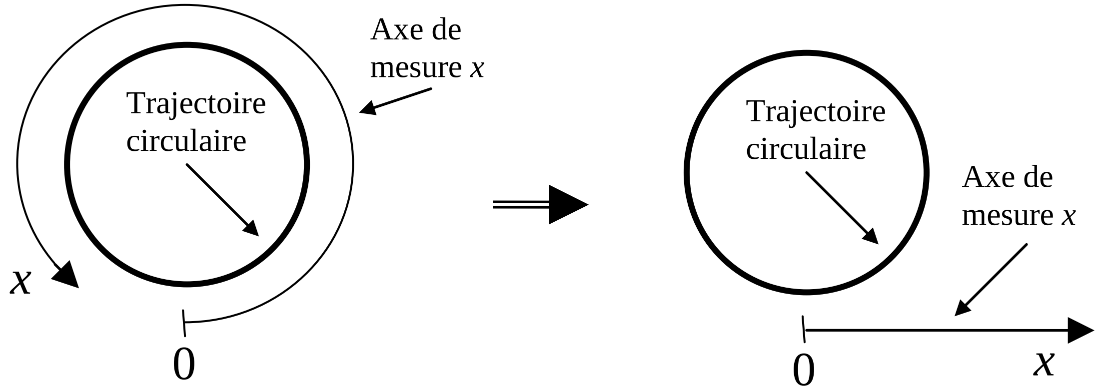
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}a_C\Delta t^2 - \frac{x^2}{2r} \qquad \text{(Remplacer } a_C = \frac{v^2}{r}\text{)}$$

Pour que le mouvement approximé converge vers le mouvement circulaire exact, il faut que le temps de parcours Δt tende vers zéro. Dans ce cas, le déplacement de correction x à accélération constante sera petit et le terme $x^2/2r$ sera négligeable :

$$x = \frac{1}{2}a_C\Delta t^2 - \frac{x^2}{2r} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta t \to 0} x = \frac{1}{2}a_C\Delta t^2 \quad \text{où} \quad a_C = \frac{v^2}{r} \qquad \blacksquare$$

Une trajectoire rectiligne en forme de cercle

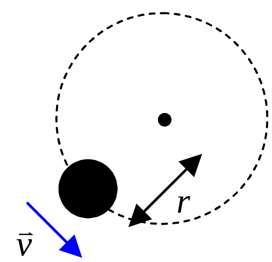
Lorsqu'on étudie le déplacement d'un objet le long d'une **trajectoire courbée**, on peut mesurer le déplacement à l'aide d'un **axe *x* rectiligne** épousant la forme de la trajectoire. Si le mouvement le long de la trajectoire courbée est **uniformément accéléré**, alors nous pouvons alors utiliser les **équations du MUA**.



La période d'un MCU

La **période** d'un MCU est le **temps** requis pour **effectuer un tour complet** de la **trajectoire circulaire** à **vitesse constante**. La période dépend du rayon r de la trajectoire circulaire et de la vitesse constante v le long de la trajectoire :

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$



où T : La période du MCU (s)
r : Rayon du MCU (m)
v : Vitesse du MCU (m/s)

Preuve :

Puisque le mouvement le long d'un MCU peut être analysé comme étant un mouvement à une dimension, utilisons les équations du MUA pour analyser le temps requis pour effectuer un tour complet de la trajectoire circulaire à vitesse constante :

$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + v_{x0} t$ (Acc.le long de la trajectoire nulle, $a_x = 0$)

$\Rightarrow \quad x - x_0 = v_{x0} t$ (Isoler $x - x_0$)

$\Rightarrow \quad (2\pi r) = v_{x0} t$ (Trajectoire circulaire : $x - x_0 = 2\pi r$)

$\Rightarrow \quad t = \frac{2\pi r}{v_{x0}}$ (Isoler t)

$\Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v} \quad \blacksquare$ (Remplacer $t = T$ et $v_{x0} = v_x$)

La fréquence

De façon générale, la **fréquence** est le **nombre de cycles complets** (tours complets pour le MCU) effectués **en une seconde**. Puisque la période mesure le temps pour effectuer un cycle complet (secondes/cycle), la fréquence sera l'inverse de la période (cycles/seconde) :

$$f = \frac{1}{T}$$

où f : La fréquence (s^{-1} ou Hz)

T : La période (s)

Situation 1 : *En orbite autour de Mars.* La sonde *Mars Reconnaissance Orbiter* est en orbite circulaire autour de la planète Mars à 280 km d'altitude. Le Rayon de Mars est égal à 3400 km. La sonde prend 113 minutes pour parcourir une orbite complète. On désire déterminer **(a)** le module de l'accélération centripète et **(b)** la fréquence.

Évaluons la période du MCU effectué par la sonde en seconde : (1 min = 60 s)

$$T = 113\ \text{min} \quad \Rightarrow \quad T = 113\ \text{min} \times \frac{60\,\text{s}}{1\,\text{min}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 6780\ \text{s}}$$

Évaluons le rayon de la trajectoire circulaire :

$r = R_{mars} + h_{altitude} \quad \Rightarrow \quad r = \left(3400\times10^{3}\right) + \left(280\times10^{3}\right)$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{r = 3{,}68\times10^{6}\,\text{m}}$ (Évaluer r)

Évaluons la vitesse de la sonde à partir de la période T et du rayon r :

$T = \dfrac{2\pi r}{v} \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{2\pi r}{T}$ (Isoler v)

$\Rightarrow \quad v = \dfrac{2\pi\left(3{,}68\times10^{6}\right)}{(6780)}$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{v = 3410\ \text{m/s}}$ (Évaluer v)

Évaluons l'accélération centripète du MCU :

$$a_C = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad a_C = \frac{(3410)^2}{\left(3{,}68\times10^{6}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_C = 3{,}16\ \text{m/s}^2} \quad \textbf{(a)}$$

Nous pouvons évaluer la fréquence f à partir de la période T :

$$f = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{(6780)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = 1{,}475\times10^{-4}\,\text{Hz}} \quad \textbf{(b)}$$