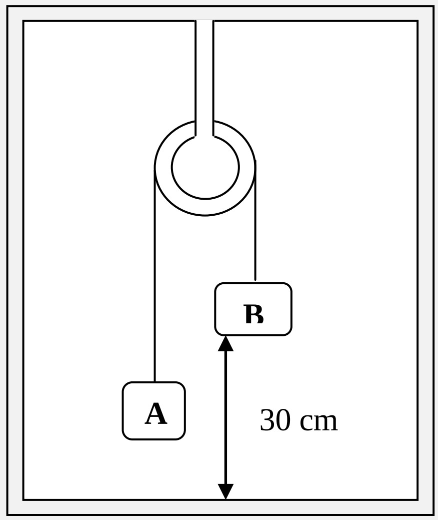
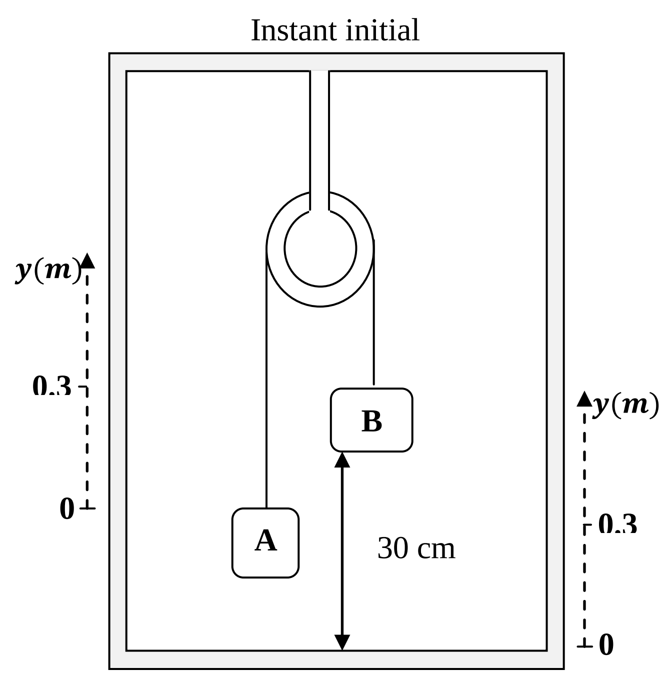
Situation 1 : *Un bloc monte, l'autre descend.* Deux blocs **A** ($m_A = 0,5\ kg$) et **B** ($m_B = 2,0\ kg$) sont reliés ensemble par une corde qui passe sur une poulie fixée au plafond (schéma ci-dessous). Les blocs sont initialement immobiles et le dessous du bloc **B** est à 30 cm au-dessus du plancher. On désire calculer le module de la vitesse du bloc **B** quand il touche le plancher. (La poulie est sans frottement; la masse de la poulie et des cordes sont négligeable.)



Solution :



Instant initial :

$\boldsymbol{m_A = 0.5\ kg;\ m_B = 2\ kg}$

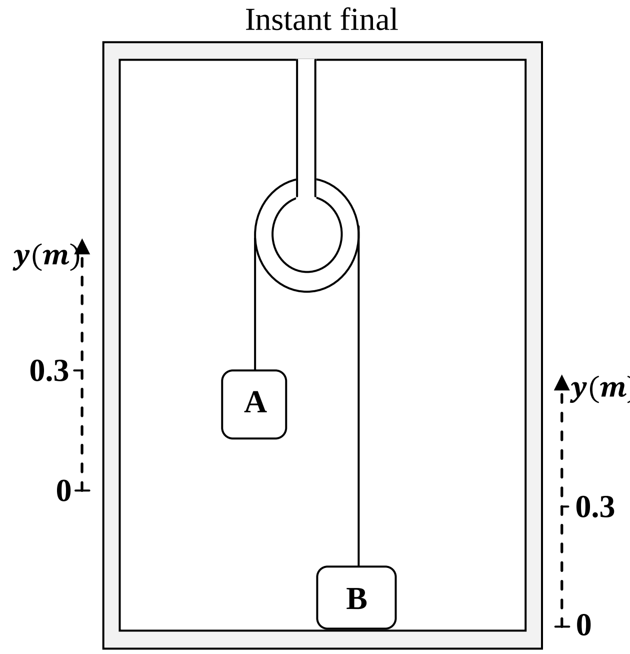
$\boldsymbol{y_{iA} = 0\ m\ ;\ y_{iB} = 0.3\ m}$

$\boldsymbol{v_{iA} = v_{iB} = 0\ m/s}$

Instant final :

$y_{fA} = 0.3\ m\ ;\ y_{fB} = 0\ m$

$v_{fA} = v_{fB} = v_f\ m/s$



Nous voulons déterminer v_f :

- <u>L'énergie mécanique initiale du système :</u>

$$E_i = K_{iA} + K_{iB} + U_{iA} + U_{iB}$$
$$= \frac{1}{2}mv_{iA}^2 + \frac{1}{2}mv_{iB}^2 + m_A g y_{iA} + m_B g y_{iB}$$
$$= 0 + 0 + 0 + (2 \times 9.8 \times 0.3)$$
$$= 5.88\ \mathrm{J}$$

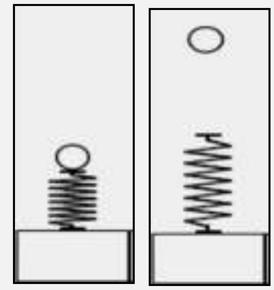
- <u>L'énergie mécanique initiale du système :</u>

$$E_f = K_{fA} + K_{fB} + U_{fA} + U_{fB}$$
$$= \frac{1}{2}mv_{fA}^2 + \frac{1}{2}mv_{fB}^2 + m_A g y_{fA} + m_B g y_{fB}$$
$$= \left(\frac{1}{2} \times 0.5 \times v_f^2\right) + \left(\frac{1}{2} \times 2 \times v_f^2\right) + (0.5 \times 9.8 \times 0.3) + 0$$
$$= \left(1.25v_f^2 + 1.47\right)\mathrm{J}$$

- <u>Il n'y a pas de travail non conservatif dans cette situation :</u> $W_{autre} = 0$
- <u>Selon le principe de conservation de l'énergie :</u>

$$E_i = E_f + W_{autre}$$
$$1.25v_f^2 + 1.47 = 5.88 + 0$$
$$1.25v_f^2 = 4.41$$
$$v_f = \pm\sqrt{3.528} = \pm 1.88\ m/s$$
$$v_f = 1.88\ m/s$$

Situation 2 : *Un lance-balles à ressort.* Un ressort idéal vertical($k = 800\ N/m$) est fixé au sol. Sa longueur naturelle est égale à 25 cm. On le comprime de 5 cm (schéma ci-dessous), on place une balle de 500 g contre son extrémité supérieur (la balle n'est pas fixée au ressort) et on lâche le tout (vitesse initiale nulle). On désire déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle par rapport au sol. (La résistance de l'air est négligeable.)



Solution :

<u>Instant initial :</u>

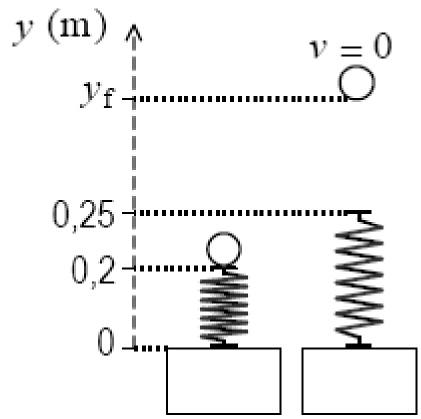
$(\boldsymbol{k = 800\ N/m})$

$\boldsymbol{m_b = 0.5\ kg}$

$\boldsymbol{y_i = 0.2\ m}$

$\boldsymbol{v_i = 0\ m/s}$ **(**La balle est immobile**)**

$\boldsymbol{e_i = 0.05\ m}$



<u>Instant final :</u>

$\boldsymbol{v_f = 0\ m/s}$ **(**La balle est au sommet de trajectoire**)**

$\boldsymbol{e_f = 0\ m}$

$\boldsymbol{y_f = ?\ m}$

- <u>Énergie mécanique initiale :</u>

$$\boldsymbol{E_i = K_i + U_{gi} + U_{ri} = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i + \frac{1}{2}ke_i^2}$$

$$\boldsymbol{= 0 + (0.5 \times 9.8 \times 0.2) + (\frac{1}{2} \times 800 \times (0.05)^2) = 1.98\ \mathrm{J}}$$

- <u>Énergie mécanique finale :</u>

$$\boldsymbol{E_f = K_f + U_{gf} + U_{rf} = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f + \frac{1}{2}ke_f^2}$$

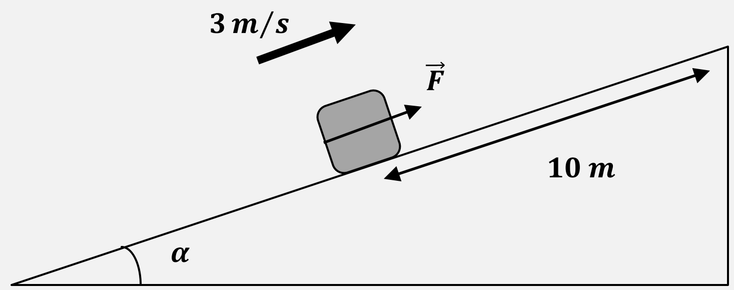
$$\boldsymbol{= 0 + (0.5 \times 9.8 \times y_f) + 0 = 4.9y_f\ \mathrm{J}}$$

- <u>Il n'y a pas de travail non conservatif dans cette situation :</u> $\boldsymbol{W_{autre} = 0}$
- <u>Selon le principe de conservation de l'énergie :</u>

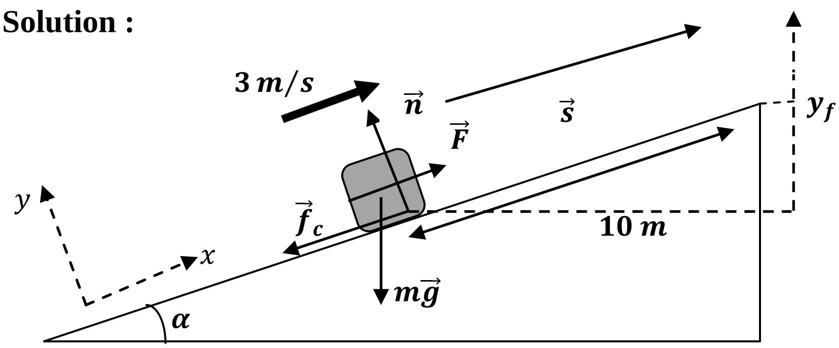
$$\boldsymbol{E_i = E_f + W_{autre} \Rightarrow 4.9y_f = 1.98 + 0}$$

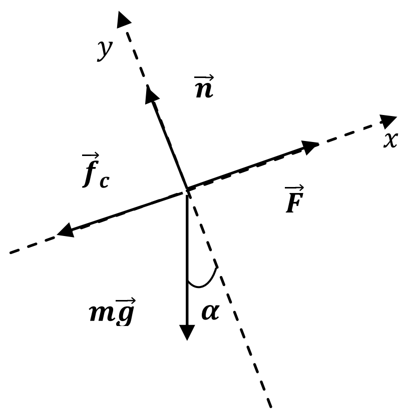
$$\boldsymbol{\Rightarrow y_f = 40.4\ cm}$$

Situation 6 : ***Une pente à remonter.*** Albert et Béatrice poussent sur une caisse de 100 kg afin de la hisser en haut d'un plan de 20 m de longueur incliné à $\alpha = 15°$ par rapport à l'horizontale. Il y a un coefficient de frottement cinétique de ($\mu_c = 0.3$) entre le plan et la caisse.
À mi-chemin, alors que la caisse se déplace à 3 m/s, Albert tombe essoufflé et Béatrice demeure seule pour pousser sur la caisse : elle maintient une force constante $F = 500\ N$ parallèle au plan. On désire déterminer le module de la vitesse de la caisse en haut de la pente.



Solution :





<u>**Données:**</u>

$\boldsymbol{m = 100kg;\ \alpha = 15°;\ s = 10\ \mathrm{m}}$

$\boldsymbol{W_{autre} = W_F + W_{f_c}}$ (Travail $W_n = 0\mathrm{J}$)

$\boldsymbol{F = 500N;\ f_c = \mu_c n}$

- <u>La 2ème loi de Newton sur l'axe y :</u>

$$\sum F_y = n - mgcos\alpha = 0 \Longrightarrow n = mgcos\alpha$$

$$\Longrightarrow f_c = \mu_c mgcos\alpha = 284,0\ \mathrm{N}$$

- <u>Instant initial :</u>

$y_i = 0\ m$

$v_i = 3\ m/s$

$$K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{100 \times 3^2}{2} = 450\mathrm{J}$$

$$U_{gi} = mgy_i = 0\ \mathrm{J}$$

$$E_i = K_i + U_{gi} = 450\ \mathrm{J}$$

- Instant final :

$$y_f = s\sin\alpha\ m = 10 \times \sin 15° = 2.59\ m;\ v_f = ?\ m/s$$

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{100 \times 3^2}{2} = 50v_f^2\ \mathrm{J};\ U_{gf} = mgy_f = 2538,2\ \mathrm{J}$$

$$E_f = K_f + U_{gf} = \left(50v_f^2 + 2538,2\right)\ \mathrm{J}$$

- Le travail des autres forces : $W_{autre} = W_F + W_{f_c}$

$$W_F = Fs\cos\theta_{Fs} = 500 \times 10\cos 0° = 5000\ \mathrm{J}$$

$$W_{f_c} = f_c s\cos\theta_{f_c s} = 284 \times 10\cos 180° = -2840\ \mathrm{J}$$

$$W_{autre} = 5000 + (-2840) = 2160\ \mathrm{J}$$

- Énergie mécanique :

$$E_i = E_f + W_{autre} \quad \Longrightarrow 450 = 50v_f^2 + 2538,2 + 2160$$

$$\Longrightarrow 50v_f^2 = 71,8$$

$$\Longrightarrow v_f^2 = 1,436$$

$$\Longrightarrow v_f = \pm 1,20$$

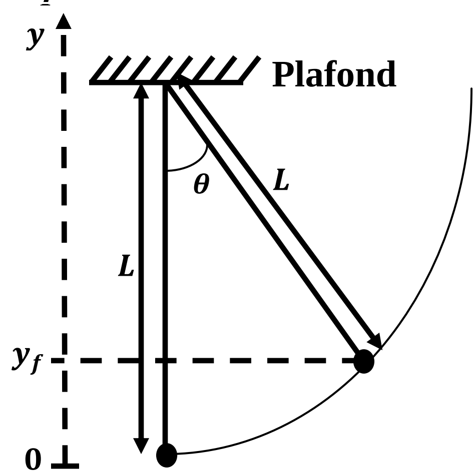
$$\Longrightarrow v_f = 1,20\ \mathrm{m/s}$$

Exercices

3.4.12 L'angle maximal d'un pendule. Avec une balle de 0,4 kg et une corde de 0,5 m, on crée un pendule que l'on accroche au plafond. On fait osciller le pendule et on observe que le module de la vitesse de la balle est égal à 1,5 m/s au point le plus bas de sa trajectoire. Aux deux extrémités de l'oscillation, quel est l'angle que fait la corde avec la verticale?

Solution :

L'angle maximal d'un pendule.



Données :

$$v_f = 0\,m/s\,, y_i = 0\,m, W_{autre} = 0\text{J}, m = 0.4\,kg, L = 0.5\,m, v_i = 1.5\,m/s$$

Système d'axe : Prenons l'axe *y* vertical vers le haut avec *y* = 0 à la position où la balle est le plus bas dans sa trajectoire circulaire.

Instant initial : Balle dans la trajectoire où sa position est la plus basse.
Instant final : Balle dans la trajectoire où sa position est la plus haute.

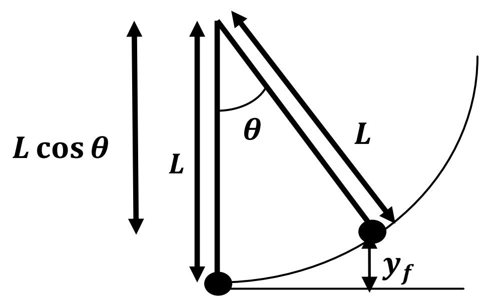
<u>Conservation de l'énergie :</u>

$$E_f = E_i + W_{autre}$$
$$K_f + U_f = K_i + U_i + W_{autre}$$
$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i + W_{autre}$$

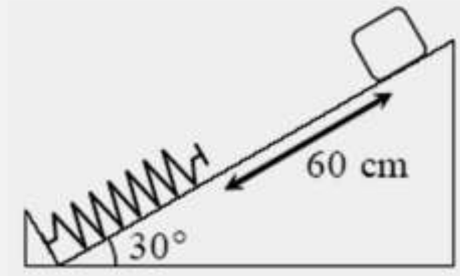
$$mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2$$
$$y_f = \frac{1}{2}\frac{v_i^2}{g}$$
$$y_f = \frac{1}{2}\frac{(1.5)^2}{9.8}$$
$$y_f = \mathbf{0.115\ m}$$

Puisque la corde possède une longueur de 0,5 m, nous avons par rapport à la verticale un angle de :

$$y_f = L - L\cos\theta$$
$$y_f = L(1-\cos\theta)$$
$$1-\cos\theta = \frac{y_f}{L}$$
$$\cos\theta = 1-\frac{y_f}{L}$$
$$\theta = \mathbf{39{,}65°}$$

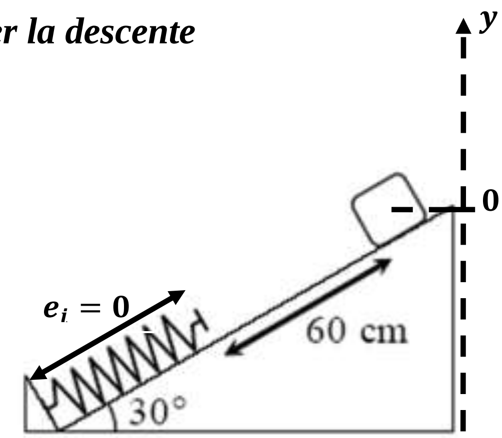


3.4.15 Un ressort pour freiner la descente. Sur un plan sans frottement incliné à 30° par rapport à l'horizontale, un bloc de 2 kg initialement immobile glisse sur une distance de 60 cm avant de rencontrer un ressort idéal. On observe que la compression maximale du ressort est égale à 20 cm. Que vaut sa constante de rappel?



Solution :

Un ressort pour freiner la descente



Données :

$(y_i = 0\ m, e_i = 0\ m, v_i = 0 m/s\ , v_f = 0 m/s, W_{autre} = 0\text{J}$

Système d'axe : Prenons l'axe *y* verticale vers le haut avec *y* = 0 à la position initiale du bloc (en haut).
Instant initial : Bloc en haut du plan.
Instant final : Bloc en bas du plan comprimant le ressort.

<u>Conservation de l'énergie :</u>

$$E_f = E_i + W_{autre}$$
$$K_f + U_{gf} + U_{rf} = K_i + U_{gi} + U_{ri} + W_{autre}$$
$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f + \frac{1}{2}ke_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i + \frac{1}{2}ke_i^2 + W_{autre}$$

$$mgy_f + \frac{1}{2}ke_f^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}ke_f^2 = -mgy_f$$

$$k = -\frac{2mgy_f}{e_f^2}$$

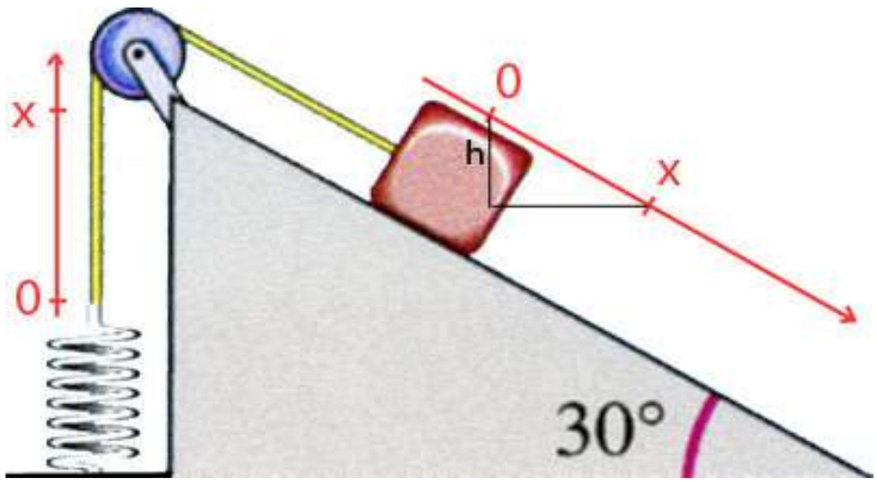
$$\left\{\begin{matrix} y_f = -(0.6 + 0.2)\sin 30° = -0.4\ m \\ e_f = 0.2\ m \end{matrix}\right\}$$

$$k = -\frac{2mgy_f}{e_f^2} = -\frac{2 \times 2 \times 9.8 \times (-0.4)}{(0.2)^2}$$

$$k = 392\ N/m$$

Exercice: un bloc de $220g$ peut glisser sans frottement sur un plan incliné à $30°$; il est relié à un ressort ($k = 3.6\ N/m$) via une poulie (figure ci-dessous). Le bloc est initialement au repos et l'allongement du ressort est nul.

(a) Quelle distance maximale le long du plan incliné le bloc parcourt-il ?
(b) Quel est le module de la vitesse du bloc lorsqu'il a glissé de $40cm$ vers le bas du plan incliné ?



Solution :

Initialement, le bloc est au repos avec une énergie potentielle nulle au point $x = 0$. Le ressort est initialement détendu à $x = 0$. Lorsque le bloc descend d'une distance x, son énergie potentielle devient $-mgh$ et le ressort est étiré d'une distance x. Notez que la masse s'arrête momentanément avant de remonter; c'est pourquoi on pose que $v = 0$ pour trouve x_{max}.

$$E_i = E_f$$

$$0 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mgx\sin\theta \qquad\qquad h = x\sin\theta$$

(a) $0 = \frac{1}{2}kx_{max}^2 - mgx_{max}\sin\theta$

$$x_{max} = \frac{2mg\sin\theta}{k} = \frac{2 \times 0.22 \times 9.81 \times \sin 30°}{3.6} = 0.600\ m$$

(b)

$$v = \sqrt{\frac{2(mgx\sin\theta - \frac{1}{2}kx^2}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(0.22 \times 9.81 \times 0.4 \times \sin 30^\circ - \frac{1}{2} \times 3.6 \times 0.4^2}{0.22}} = \mathbf{1.14\ m/s}$$