Solutionnaire du concours de l'A.C.P. 1995

Partie A

1 (d)	2 (b)	3 (b)	4 (a)	5 (c)
6 (c)	7 (d)	8 (c)	9 (b)	10 (b)
11 (a)	12 (d)	13 (d)	14 (d)	15 (c)
16 (d)	17 (d)	18 (b)	19 (a)	20 (a)
21 (b)	22 (d)	23 (c)	24 (a)	25 (c)

Partie B

Problème 1

(a) L'unique force agissant sur la personne est celle due à la gravité, dirigée vers le bas, et qui dans son cas a une grandeur d'environ 638 N. Cette force donne lieu à une accélération g dans la même direction. L'expérience de l'apesanteur résulte simplement de l'absence de toute force de contact sur le corps pendant un laps de temps plus ou moins long, tel qu'il arrive lors d'une chute libre ou bien en l'absence de tout champ gravitationnel. Dans la vie courante, ce sont ces forces normales qui sont à l'origine de la sensation de pesanteur.

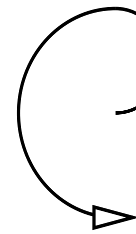
(b) La vitesse horizontale demeure constante pendant tout le vol. À l'apogée de la trajectoire, la grandeur du vecteur vitesse est à son minimum car la vitesse verticale y est nulle. Il faut donc que la vitesse horizontale soit de 300 km/hr. Pour maximiser la durée de la période d'apesanteur, la vitesse du KC-135 lorsqu'il amorce sa trajectoire parabolique doit être aussi grande que possible, soit 500 km/hr. L'angle α satisfait donc la relation $\cos\alpha = 300/500$, d'où $\alpha = 53°$.

(c) La vitesse verticale initiale est $v_{\mathrm{h}} = 400$ km/hr (111 m/s). L'avion atteint son apogée à l'instant où cette vitesse devient nulle. La sensation d'apesanteur dure donc un temps :

$$\begin{aligned} t_{\mathrm{w}} &= \frac{2\,v_{\mathrm{h}}}{g} \\ &= 22{,}65\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

(d) Le problème peut sembler difficile, sauf si l'on remarque qu'en l'absence de gravité, l'avion n'aurait qu'à suivre une trajectoire circulaire de rayon tel et avec une vitesse telle que son accélération centripète soit g. En présence de la gravité, on peut imaginer l'avion suivant cette trajectoire à l'intérieur d'une pièce gigantesque en chute libre (ayant une accélération g vers le bas).

Vue de l'extérieur de la pièce imaginaire par un observateur immobile, la trajectoire résultante aurait à peu près la forme suivante :



Au sommet de la boucle, il y a une accélération nette de $2g$, dirigée vers le bas, tandis qu'au bas de la boucle l'accélération est nulle. Sur les côtés de la boucle, lorsque la direction de l'avion est exactement vers le haut ou vers le bas, il y a une accélération de $\sqrt{2}g$ à un angle de 45° en dessous de l'horizontale.

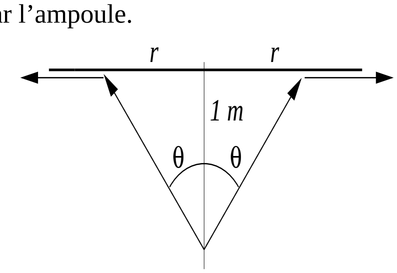
Problème 2

(a) La loi de la réfraction de Snell-Descartes donne :

$$1{,}3\ \sin\theta \ = \ 1\ \sin 90°$$

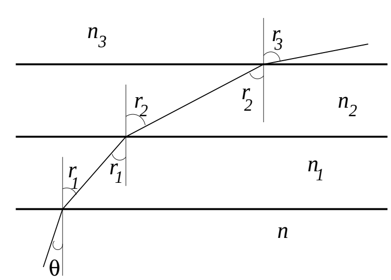
d'où il vient que l'angle auquel se produit la réflection totale interne est $\theta = 50{,}3°$.

(b) Les rayons lumineux émis par l'ampoule et qui subissent une réflection totale interne sont illustrés dans la figure ci-dessous. Seuls les rayons incidents sur la surface à un angle inférieur à l'angle critique peuvent sortir de l'eau. Vu d'en haut, il apparaît donc une région circulaire illuminée par l'ampoule.



La surface illuminée est $A = \pi r^2$, où $r = (1\ \mathrm{m}) \times \tan 50{,}3°$, ce qui donne $A = 4{,}55\ \mathrm{m}^2$.

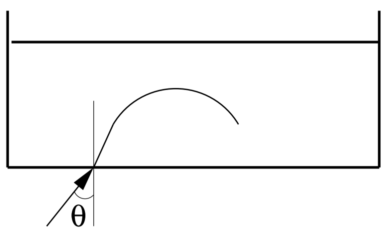
(c) On peut imaginer que l'eau du réservoir est composée d'une superposition de strates minces ayant chacune un indice de réfraction légèrement plus petit que celui de la strate voisine en dessous. La trajectoire d'un rayon traversant les strates est donc la suivante :



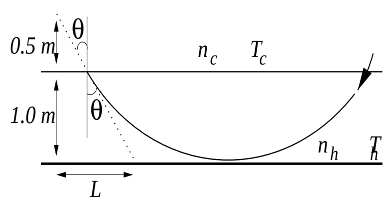
En appliquant la loi de Snell-Descartes à chaque interface, on obtient :

$$\begin{aligned} n \sin\theta &= n_1 \sin r_1 \\ &= n_2 \sin r_2 \\ &= n_3 \sin r_3 \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Donc $n \sin\theta = 1{,}3 \sin 50{,}3°$, où n est l'indice de réfraction de l'eau au fond du réservoir. Le taux de croissance de l'indice étant $\alpha = 0{,}05$/m, on trouve $n = 1{,}35$, d'où $\theta = 47{,}8°$. La figure ci-dessous montre la trajectoire d'un rayon pénétrant la base du réservoir à un angle plus grand.



(d) L'indice de réfraction de l'air augmente à mesure que l'on s'élève au dessus de la route, l'air devenant à la fois plus frais et plus dense. La situation ressemble à celle de notre réservoir d'eau salée. Un rayon lumineux qui atteint votre oeil aura parcouru la trajectoire illustrée ci-dessous, sa direction apparente étant indiquée par la ligne en pointillé.



Utilisons la loi des gaz parfaits, $PV = NkT$, où P est la pression atmosphérique, supposée uniforme, V est le volume occupé par N molécules et T est la température de l'air en Kelvin. La densité de l'air est proportionnelle à N/V, de sorte que

$$n(T) - 1 \propto \frac{1}{T}$$

On donne l'indice de réfraction à $T = 288$ K, ce qui permet de calculer les indices de réfraction n_h, à $T = 333$ K, et n_c à $T = 303$ K (respectivement 60° et 30°).

$$\begin{aligned} \frac{n_\mathrm{h} - 1}{1,000276 - 1} &= \frac{288}{333} \\ \frac{n_\mathrm{c} - 1}{1,000276 - 1} &= \frac{288}{303} \end{aligned}$$

On obtient ainsi $n_\mathrm{h} = 1{,}000239$, tandis que $n_\mathrm{c} = 1{,}000262$. À l'aide du résultat trouvé en (c), on calcule l'angle θ pour qu'un rayon soit totalement réfléchi par l'air juste au dessus de la route :

$$1,000262 \sin\theta = 1,000239 \sin 90°$$

ce qui donne $\theta = 89{,}61°$. Un peu de géométrie permet ensuite de trouver la distance entre votre oeil et le point sur la route d'où paraît provenir le rayon lumineux : $L = (1{,}5\ \mathrm{m}) \times \tan 89{,}61°$. On trouve $L = 221{,}2$ m. Comme en réalité le rayon provient du ciel, la route à une distance de 221,2 m paraît bleutée et embrouillée.

Problème 3

La vitesse naturelle à laquelle nous marchons dépend dans une large mesure de la longueur pendulaire de nos jambes. Ainsi ma jambe a une longueur $l = 0{,}8$ m et, puisque la longueur d de mon pas est à peu près la même, prenons $l = d$. En l'absence de renseignements précis sur la forme de ma jambe, supposons qu'il s'agit d'un tube uniforme avec un moment d'inertie :

$$I = \frac{1}{3} m l^2$$

Sa période d'oscillation est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

où $h = l/2$. Il vient donc :

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} \\ &= 1{,}47\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

La valeur expérimentale de T est plus proche d'une seconde à cause de la répartition non uniforme des masses dans ma jambe (son centre de masse se trouve plus haut que son centre géométrique) ; en plus nous utilisons une formule valable pour de faibles amplitudes alors qu'ici les oscillations ont une grande amplitude.

La vitesse de marche v est donnée par la longueur de mon pas divisée par la demi-période :

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{T/2} \approx \frac{2l}{T} \\ &= 1{,}09\ \mathrm{m/s}\ \ (\text{environ } 4\ \mathrm{km/hr}) \end{aligned}$$

L'allure est assez décontractée. La valeur expérimentale de T donne environ 6 km/hr.

On pourra raffiner ce modèle en tenant compte de l'effet de pendule composé dû à la présence du genou, de la période d'oscillation des bras du marcheur (les coureurs replient leurs bras pour en augmenter la fréquence d'oscillation), et en localisant mieux le centre d'oscillation de la jambe.