Solutionnaire du concours de l'A.C.P. 1994

Partie A

1	(a)	5	(c)	9	(a)	13	(c)	17	(d)
2	(a)	6	(a)	10	(b)	14	(c)	18	(a)
3	(d)	7	(c)	11	(b)	15	(c)	19	(a)
4	(a)	8	(c)	12	(a)	16	(b)	20	(c)

Partie B

Problème 1

(a) La longueur d'onde des signaux radio est $\lambda = c/f_o = 25$ m. Il est clair que l'interférence est constructive si $\theta = 0$, ou si $\theta = \pi/2$. L'amplitude du signal reçu par l'avion est double de celle en provenance d'un seul émetteur. L'intensité étant proportionnelle au carré de l'amplitude, l'intensité reçue est donc $I = 4I_o$.

(b) Dans le cas où l'interférence est destructrice, on résout l'équation :

$$l \sin\theta \;=\; (2n+1)\lambda/2$$

où $l = 100$ m est la distance séparant les émetteurs et n est un nombre entier. On a donc le problème courant d'interférence de deux sources, le récepteur se trouvant à une distance très supérieure à celle qui sépare les émetteurs. On trouve les directions angulaires suivantes : $\theta = 7{,}2°$, $22{,}0°$, $38{,}7°$ et $61{,}0°$. La direction de $30{,}0°$ correspond à une interférence constructive, en ce sens que la force du signal reçu des deux émetteurs serait un maximum.

(c) La différence de chemin entre les signaux des deux émetteurs est $\Delta r = \sqrt{l^2 + x^2} - x$, où x est la distance entre l'avion et l'émetteur le plus proche. Pour trouver l'endroit où se produit le premier minimum d'interférence lors de l'approche de l'appareil, on prend $\Delta r = \lambda/2$, ce qui donne :

$$\sqrt{l^2 + x^2} \;=\; \frac{\lambda}{2} + x$$

En élevant les deux membres au carré, on obtient :

$$x \;=\; \frac{1}{\lambda}\left(l^2 - \frac{\lambda^2}{4}\right)$$

dont la solution est $x = 394$ m. Il faut espérer que l'avion se prépare à atterrir s'il se trouve si près de la piste !

(d) D'après la formule de l'effet Doppler appliquée aux ondes électromagnétiques, l'avion reçoit un signal de fréquence

$$f \;=\; f_o \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

où c est la vitesse de la lumière. [Le problème n'étant pas relativiste, l'élève ne sera pas sanctionné pour avoir utilisé la formule classique de l'effet Doppler.] La calculatrice n'étant que de peu de secours, la résolution de cette équation demande un peu d'astuce. Tout d'abord, on élève l'équation au carré :

$$(1 - v/c)\, f^2 \;=\; (1 + v/c)\, f_o^2$$

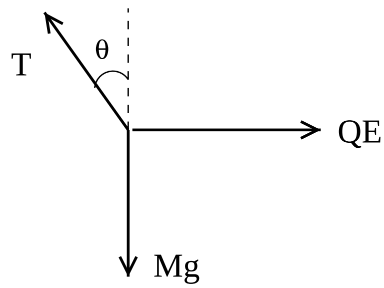
et on la réécrit sous la forme suivante :

$$(f - f_o)(f + f_o) \;=\; (f^2 + f_o^2)\, v/c$$

L'avion se déplace à une vitesse très inférieure à celle de la lumière, de sorte qu'on peut s'attendre que les deux fréquences f_o et f diffèrent très peu l'une de l'autre. On prend donc $f + f_o \approx 2f_o$, puison définit $\Delta f = f - f_o$, et on arrive à $\Delta f \approx f_o v/c$. Cette quantité représente la fréquence de battement des signaux, et elle a une valeur de 5,6 Hz. Dans le cas où la fréquence des battements est de 10 Hz, on a $v = 250$ m/s, soit 900 km/hr. Comme la fréquence détectée est inférieure au signal de référence, l'avion **s'éloigne** de l'aéroport.

Problème 2

(a) Lorsque les deux commutateurs sont ouverts, aucun courant ne passe dans les fils et il n'existe pas de circuit fermé. Considérons le diagramme ci-dessous illustrant les forces qui s'exercent sur le fil du bas :



On en déduit les deux équations :

$$T \sin\theta = QE$$
$$T \cos\theta = Mg$$

Ici T représente la tension dans les fils latéraux. L'angle satisfait alors $\tan\theta = QE/Mg$, d'où on tire $\theta = 84{,}4°$.

(b) Avec un courant $\epsilon/R = 6{,}0$ A dans le fil du bas, une force magnétique $F_{\rm m} = IlB$ dirigée vers le bas s'exerce sur le fil du bas, où l est la longueur du fil. L'angle satisfait maintenant la relation :

$$\tan\theta = \frac{QE}{Mg + IlB}$$

correspondant à un angle de 68,2°.

(c) Nous sommes maintenant en présence, dans la boucle fermée inférieure, d'un flux magnétique variable dans le temps. Égal au départ à $Bl^2/2$, ce flux Φ tombe à zéro en un temps $\Delta t = 5$ ms. Le courant moyen induit dans le fil inférieur est $I_{\rm moyen} = \Delta\Phi/R\Delta t$=2.5 A. Pour imprimer au montage un mouvement ascendant, il faut fournir un travail pour élever la masse ainsi que pour faire passer un courant dans la résistance qui dissipe l'énergie sous forme de chaleur. Une bonne valeur approchée pour le travail fourni pour amener le montage à sa nouvelle position d'équlibre est donnée par :

$$W = Mgl + I^2_{\rm moyen} R\Delta t$$

c'est-à-dire $W = 0,08$ J.

(d) Avec les deux commutateurs ouverts, la position d'équilibre du montage est à un angle de $\theta_{\rm eq} = 84,4°$ par rapport à la verticale. Si, à partir de cette position, on déplace le montage d'un angle α petit, la force nette sur le fil du bas est dirigée vers la position d'équilibre et prend la grandeur :

$$F = Mg \sin(\theta_{\rm eq} + \alpha) - QE \cos(\theta_{\rm eq} + \alpha)$$

A l'aide des formules d'addition trigonométriques, on réécrit ceci sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F &= Mg[\sin\theta_{\rm eq} \cos\alpha + \cos\theta_{\rm eq} \sin\alpha] \\ &\quad - QE[\cos\theta_{\rm eq} \cos\alpha - \sin\theta_{\rm eq} \sin\alpha] \end{aligned}$$

Sachant que $Mg \sin\theta_{\rm eq} = QE \cos\theta_{\rm eq}$, on trouve :

$$\begin{aligned} F &= M[g \cos\theta_{\rm eq} + \frac{QE}{M} \sin\theta_{\rm eq}] \sin\alpha \\ &= M\, g_{\rm eff} \sin\alpha \end{aligned}$$

Comparons ceci à la force qui fait se mouvoir le pendule simple : $F = Mg \sin\alpha$, où α est le déplacement angulaire par rapport à l'équilibre. Pour un déplacement petit, notre montage va exécuter un mouvement harmonique simple de période $T = 2\pi\sqrt{l/g_{\rm eff}}$. Cette période a une valeur de 0,14 s. En fermant le commutateur S_2, on fait apparaıtre un courant induit qui va amortir le mouvement du pendule. Celui-ci finit par s'arrêter à $\theta_{\rm eq}$.

Problème 3

La quantité d'énergie par unité de temps incidente sur une sphère noire de rayon r, située à distance R du soleil, est :

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \pi r^2 S\,(R_{\rm ES}/R)^2$$

La force F qui s'exerce sur cette même sphère est donnée par :

$$F\,\Delta t = \Delta p = \frac{\Delta E}{c}$$

La masse m de la sphère, qui est creuse, dépend de l'épaisseur d de la matière dont elle est faite et de sa densité ρ :

$$m = 4\pi r^2 \rho d$$

La force F doit contrebalancer la force gravitationnelle F_g :

$$F_g = \frac{GMm}{r^2}$$

où GM pour le soleil s'obtient en faisant appel à la 3$^{\rm e}$ loi de Kepler :

$$GM = 4\pi \frac{R^3_{\rm ES}}{T^2}$$

T étant une année exprimée en secondes. Pour avoir une accélération qui éloigne du soleil, il faut que :

$$d < \frac{S R^2_{\rm ES}}{4c\rho GM}$$

c'est-à-dire $d < .2\ \mu$m si $\rho = 10^3$ kg/m^3.

Dans le cas d'une sphère parfaitement réfléchissante, on a un facteur 2 supplémentaire provenant de la variation de la quantité de mouvement, ainsi qu'un facteur $\sin^2\theta$ qui prend en compte le changement d'orientation de la surface de la sphère. Après intégration, on retombe sur le même résultat. En effet, il suffit de savoir (même sans notions de calcul intégral) que

$$\langle \sin^2\theta \rangle = \frac{1}{2}$$

On a donc $d < \lambda$ pour le rayonnement solaire. Avec une couche d'aluminium d'environ 50 nm, on peut obtenir une surface réfléchissante à 90%. Obtenir une surface parfaitement absorbante est beaucoup plus difficile.