PHY EES – Astronomie et Astrophysique

« *la méthode d'Euler* »

Lorsqu'on cherche à obtenir l'équation de la vitesse en fonction du temps ou encore l'équation de la position en fonction du temps d'un objet dont l'accélération est constante, on procède de la manière suivante :

(1) L'accélération est constante :

$$\boxed{a_x = \text{constante}}$$

(2) L'accélération est la dérivée de la vitesse en fonction du temps, on peut donc intégrer l'accélération en fonction du temps et ainsi obtenir l'équation de la vitesse en fonction du temps :

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = a_x$$
$$\mathrm{d}v_x = a_x \mathrm{d}t$$
$$\int_{v_{x0}}^{v_x} \mathrm{d}v_x = \int_0^t a_x \mathrm{d}t$$
$$v_x - v_{x0} = a_x t$$

$$\boxed{v_x = v_{x0} + a_x t}$$

(3) La vitesse est la dérivée de la position en fonction du temps, on peut donc intégrer la vitesse en fonction du temps et ainsi obtenir l'équation de la position en fonction du temps :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x$$
$$\mathrm{d}x = v_x \mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}x = \left(v_{x0} + a_x t\right)\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}x = v_{x0}\mathrm{d}t + a_x t \mathrm{d}t$$
$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t v_{x0}\mathrm{d}t + \int_0^t a_x t \mathrm{d}t$$
$$x - x_0 = v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

$$\boxed{x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2}$$

$$x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}\left[a_x t\right]t$$
$$x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}\left[v_x - v_{x0}\right]t$$
$$x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}v_x t - \tfrac{1}{2}v_{x0}t$$

$$\boxed{x = x_0 + \tfrac{1}{2}\left(v_{x0} + v_x\right)t}$$

On retrouve ainsi les équations de la cinématique que vous avez apprises dans votre cours de physique mécanique.

Cependant, imaginons que nous avons une situation un peu plus complexe dans laquelle l'accélération n'est pas constante et pourrait être une fonction plus ou moins complexe qui dépend de la position et/ou de la vitesse de la particule.

Il pourrait dans certains cas être impossible d'intégrer l'accélération et ensuite la vitesse pour obtenir l'équation de la position en fonction du temps.

La méthode d'Euler est une technique qui consiste à calculer numériquement le résultat d'une intégrale qui est trop complexe pour avoir une solution algébrique. Elle fut inventée par le célèbre mathématicien Leonhard Euler (1707-1783).

Pour appliquer la méthode d'Euler, on doit diviser le mouvement de l'objet en plusieurs petits intervalles de temps Δt. Si l'intervalle de temps Δt est suffisamment petit, on pourra faire l'approximation que l'accélération ne change pratiquement pas pendant cet intervalle de temps Δt et on peut donc la considérer comme étant constante.

On effectue donc un calcul itératif, ou chaque ligne de calcul correspond à une itération, à une étape de calcul. La méthode d'Euler peut comporter plusieurs centaines ou même plusieurs milliers d'itérations. Chaque itération de calcul est obtenue à partir de l'itération précédente.

Leonhard Euler
(1707-1783)

Par exemple, si vous avez présentement effectué 500 itérations et que vous voulez calculer une 501$^{\text{ème}}$ itération, vous utiliserez uniquement les valeurs de la 500$^{\text{ème}}$ itération pour calculer les valeurs de la 501$^{\text{ème}}$ itération.

De manière algébrique, on écrit que l'itération numéro « $i + 1$ » est calculée à partir des valeurs de l'itération numéro « i ».

Voici un résumé des étapes à suivre pour effectuer un calcul itératif à l'aide de la méthode d'Euler.

1. Obtenez les paramètres initiaux de votre objet.	$\vec{\boldsymbol{r}}_0, \vec{\boldsymbol{v}}_0$
2. À l'aide des paramètres de la ligne « i », calculez l'accélération associée à la ligne « i ». En général, l'accélération ne sera pas une constante, mais sera plutôt une fonction plus ou moins complexe qui pourrait dépendre de certains paramètres comme la position et/ou la vitesse. Il est parfois utile de calculer certain paramètre intermédiaires dans Excel avant de calculer l'accélération.	$\vec{\boldsymbol{a}}_i = \vec{\boldsymbol{a}}\left(\vec{\boldsymbol{r}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_i\right)$
3. Obtenez la nouvelle valeur de temps.	$t_{i+1} = t_i + \Delta t$
4. Obtenez la nouvelle valeur de la vitesse.	$\vec{\boldsymbol{v}}_{i+1} = \vec{\boldsymbol{v}}_i + \vec{\boldsymbol{a}}_i \Delta t$
5. Obtenez la nouvelle valeur de la position.	$\vec{\boldsymbol{r}}_{i+1} = \vec{\boldsymbol{r}}_i + \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{v}}_i + \vec{\boldsymbol{v}}_{i+1}\right)\Delta t$
6. Recommencez les étapes 2 à 5 autant de fois que nécessaire.	

Une des applications possible de la technique d'Euler est d'utiliser une feuille de calcul Excel et de programmer les cellules pour effectuer les nombreux calculs nécessaires.

Dans une telle feuille Excel, chaque ligne de la feuille correspond à une itération. Ainsi chaque ligne de votre feuille Excel sera calculée en utilisant les valeurs de la ligne précédente. Il suffit de programmer correctement et intelligemment une seule ligne et ensuite de la « glisser » vers le bas de la feuille pour répéter le processus itératif autant de fois que cela est nécessaire.

Sur la page suivante, vous trouverez un exemple de problème qui peut être résolu à l'aide d'une feuille de calculs Excel basée sur la méthode d'Euler.

Exemple de problème :

À partir du sol ($y_0 = 0$), on projette une bille d'acier à une vitesse initiale de module $v_0 = 50$ m/s formant un angle $\theta_0 = 60°$ avec l'horizontale. Calculez :
(a) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la bille par rapport au sol ?
(b) Quelle est la distance horizontale franchie par la bille entre le moment où elle est lancée et le moment où elle retombe au sol ?

Dans votre analyse, vous devez considérer les 2 forces suivantes :
(1) La force de gravité, de module $F_g = mg$, qui pointe vers le sol. ($g = 9{,}8$ N/kg.)
(2) La force de frottement de l'air, de module $f = Cv^2$, qui pointe toujours dans la direction opposée à celle du vecteur vitesse de la bille.

Utilisez $m = 0{,}03$ kg et $C = 0{,}0004$ kg/m.
(En vérité, le paramètre C dépend de la masse volumique de l'air, de la forme et de la taille du projectile. La valeur de C donnée ici est raisonnable pour une bille en acier d'environ 1 cm de rayon lancée dans l'air.)

Pour votre méthode d'Euler, utilisez $\Delta t = 0{,}01$ s comme intervalles de temps.

Exemple de solution :

Consultez le fichier Excel : `EES-MéthodeEuler.xlsx` disponible sur le site web du professeur.

(1) Dans un fichier Excel, commencez par retranscrire les données fournies dans l'énoncé du problème ainsi que les constantes physiques qui seront utilisées pour effectuer les calculs. Pour plus de clarté, il est recommandé d'inscrire les variables algébriques, les valeurs numériques et les unités correspondantes. (Voir la section en bleu dans le fichier Excel.)

Note : les valeurs numériques doivent être inscrites seules dans leurs cases. Ainsi, on pourra utiliser les valeurs numériques simplement en cliquant dessus quand on programmera des formules dans d'autres cellules Excel.

(2) Dans la première ligne en haut de la feuille Excel, inscrivez un titre pour chaque colonne qui sera utilisée dans vos calculs. Il est conseillé d'inscrire la variable algébrique ainsi que les unités physique entre parenthèses. (Voir la première ligne en noir dans le fichier Excel.)

Il est souvent utilise de nommer la première colonne « # de ligne » afin de tenir le compte du nombre de lignes de calcul (nombre d'itérations) que nous avons effectué dans notre algorithme d'Euler. La ligne « $i = 0$ » correspond au point de départ dans l'algorithme d'Euler. C'est également la ligne « $i = 0$ » qui contient les conditions initiales. Les valeurs de la ligne « $i = 1$ » sont calculées en utilisant les valeurs de la ligne « $i = 0$ ». Ensuite, une fois que la ligne « $i = 1$ » est complétée, nous pourrons calculer les valeurs de la ligne « $i = 2$ » en utilisant les valeurs de la ligne « $i = 1$ » et ainsi de suite. De manière générale, on calculera les valeurs de la ligne « $i + 1$ » en utilisant les valeurs de la ligne « i ».

(3) Commencez à remplir votre ligne « $i = 0$ » en y inscrivant les valeurs initiales de votre algorithme d'Euler. (Voir cases vertes dans le fichier Excel.)

La valeur initiale du temps est $t_0 = 0$. On peut également écrire les valeurs initiales qui correspondent à la position initiale : $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$. Les valeurs initiales pour v_{x0} et v_{y0} ont été calculées en décomposant le vecteur vitesse initiale en composantes x et y :

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$$
$$v_{y0} = v_0 \sin\theta_0$$

Note : Excel effectue tous les calculs des angles en radians. Il faut donc convertir l'angle de 60° en radians avant d'utiliser la fonction **`SIN()`** ou **`COS()`** de Excel. La fonction **`RADIANS()`** peut être utilisée pour prendre des angles en degrés et les convertir en radians. (Voir cellules E13 et F13 du fichier Excel.)

Exemples : `RADIANS(90)  = 1,57079633` (= π/2)
`RADIANS(180) = 3,14159265` (= π)
`RADIANS(360) = 6,28318531` (= 2π)

Notez qu'on peut également utiliser la fonction **`DEGRES()`** de Excel pour prendre un angle en radians et le convertir en degrés. Pour écrire « π » en Excel, il faut écrire « **`PI()`** ».

Exemples : `DEGRES(PI()/2) = 90`
`DEGRES(PI())   = 180`
`DEGRES(2*PI()) = 360`

(4) Maintenant que les paramètres initiaux sont connus, il faut les utiliser pour calculer l'accélération qui correspond à la ligne « $i = 0$ ». Pour ce faire, il est souvent utile de calculer quelques résultats intermédiaires (voir cellules en orange dans le fichier Excel).

Dans le but d'obtenir les composantes a_x et a_y de l'accélération, nous avons d'abord calculé le module v du vecteur vitesse :

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ (voir cellule G13)

Connaissant v, nous pouvons calculer le module de la force de frottement qui agit sur la bille :

$f = Cv^2$ (voir cellule H13)

Note : Dans la cellule H13, on a entré comme formule « `=$C$9*G13^2` ». Il est important d'inscrire des signes de dollars « `$` » de chaque côté du « `C` » qui désigne la cellule C9, car la valeur de la cellule C9 est une constante (la constante C de l'équation $f = Cv^2$). De cette façon, même quand nous « glisserons » les lignes vers le bas plus loin dans le document, la cellule C9 restera toujours C9 dans la formule.

Cependant, la cellule G13, qui elle n'est pas écrite entre des symboles « `$` » dans la formule que nous avons inscrite changera constamment de valeur. Elle passera automatiquement de G13 à G14 à G15 à G16, etc. au fur et à mesure que nous « glisserons » les lignes vers le bas.

Il faut donc être vigilants quand on entre des formules dans des cellules Excel et il ne faut pas oublier d'ajouter des signes de « `$` » pour les cases qui correspondent à des constantes. Notez qu'au lieu d'écrire vous-même les 2 symboles « `$` », vous pouvez simplement cliquez sur la cellule que vous voulez, et une fois que son nom apparaît dans votre formule, appuyez sur la touche `F4` du clavier.

Nous connaissons maintenant le module du vecteur f qui correspond à la force de frottement de l'air, mais pour pouvoir le décomposer en composantes f_x et f_y, il faut également connaître son orientation. On commence d'abord par calculer l'orientation du vecteur vitesse de la bille :

$$\theta_v = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \qquad \text{(voir cellule I13)}$$

Puisque la force de frottement de l'air pointe toujours dans la direction opposée à celle de la vitesse, il faudra toujours ajouter 180° pour obtenir l'angle entre l'axe x et le frottement de l'air :

$$\theta_f = \theta_v + 180° \qquad \text{(voir cellule J13)}$$

Maintenant que nous connaissons le module f et la direction θ_f du vecteur qui représente la force de frottement de l'air, il ne reste plus qu'à le décomposer :

$$\begin{aligned} f_x &= f\cos\theta_f \\ f_y &= f\sin\theta_f \end{aligned} \qquad \text{(voir cellules K13 et L13)}$$

On peut maintenant appliquer le 2ème loi de Newton en x et en y pour calculer les composantes de l'accélération. (Voir cellules en rouge dans le fichier Excel.)

En x, la seule force qui agit sur la bille est la composante x du frottement de l'air :

$$a_x = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{f_x}{m} \qquad \text{(voir cellule M13)}$$

En y, il y a la composante y du frottement de l'air, mais également la force gravité $F_{gy} = -mg$:

$$a_y = \frac{\Sigma F_y}{m} = \frac{f_y - mg}{m} = \frac{f_y}{m} - g \qquad \text{(voir cellule N13)}$$

La ligne « $i = 0$ » est maintenant complétée. On peut maintenant utiliser les étapes **3.**, **4.** et **5.** de la méthode d'Euler pour obtenir les valeurs de la ligne « $i = 1$ » en utilisant les valeurs de la ligne « $i = 0$ ».

On peut également compléter la ligne « $i = 1$ » en répétant les calculs pour obtenir les composantes a_x et a_y.

Maintenant que la ligne « $i = 1$ » est complète et est entièrement « programmée » et « automatisée », il suffit de sélectionner toutes les cellules de la ligne, de cliquer sur le petit carré noir qui apparait dans le coin en bas à droite de votre sélection et de « glisser » vers le bas de la feuille Excel pour calculer automatiquement les lignes « $i = 2$ », « $i = 3$ », « $i = 4$ » … etc.

Dans ce problème particulier vous aurez besoin d'environ 600 lignes de calculs dans votre algorithme d'Euler pour répondre aux questions demandées.

Quand vous descendrez plus bas dans votre feuille Excel, vous ne verrez donc plus les lignes qui se trouvent en haut de votre feuille. C'est pour cette raison que je vous suggère de figez la ligne du haut, soit la toute première ligne, celle qui qui indique la variable algébrique et les unités de chacune de vos colonnes.

Pour ce faire, dans le menu en haut de l'écran, sélectionnez l'onglet :

`Affichage → Figer les volets → Figer la ligne supérieure`

Vous pouvez donc maintenant répondre aux questions qui étaient demandées :

(a) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la bille par rapport au sol ?

réponse :
À la ligne « $i = 258$ », soit à $t = 2{,}58$ s, la bille atteint sa hauteur maximale : $y_{max} = 43{,}1368$ m.

(b) Quelle est la distance horizontale franchie par la bille entre le moment où elle est lancée et le moment où elle retombe au sol ?

réponse :
À la ligne « $i = 590$ », soit à $t = 5{,}90$ s, la bille retombe au sol ($y \sim 0$ m) et a parcouru une distance horizontale $\Delta x = 67{,}3569$ m.

(Les lignes qui correspondent aux réponses ont été surlignées en jaune dans le document Excel.)

Le graphique ci-dessous a été obtenu en utilisant les valeurs de x et de y calculées dans Excel pour cet exemple. S'il n'y avait pas eu de force de frottement de l'air, la trajectoire aurait été une parabole parfaite. Le graphique que nous observons ici est plutôt une « parabole déformée », ce qui montre que le fait de considérer la force du frottement de l'air sur la bille a une grande influence sur sa trajectoire.